INSTITUT NATIONAL DES TELECOMMUNICATIONS
GROUPE DES ECOLES DE TELECOMMUNICATION
CONTROLE DE CONNAISSANCES

Module PS 11 : Probabilités (1ère partie)
Durée : 1,5 H
Sans document et sans calculatrice (une page manuscrite A4 est autorisée)
Date : 24.11.2005
Coordonnateur : DELMAS Jean Pierre

Nom : Prénom : Année :

Justifier chaque réponse de façon concise. Répondre sur le questionnaire même, si possible dans les limites qui vous sont proposées. Il est conseillé de faire un rapide brouillon sur une feuille à part avant de reporter votre réponse. Les trois exercices sont "indépendants".

1] **Loi de Poisson**

Le nombre de clients X dans une grande surface de distribution pendant une période donnée suit une loi de Poisson de paramètre λ. Dans cette grande surface, chaque client a la probabilité $p \in]0,1[$ de se faire voler son portefeuille. On note Y, le nombre de portefeuilles volés dans la période considérée dans cette grande surface. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Y.

2] **Loi Binomiale**

Un laboratoire doit analyser n prélèvements pour déterminer ceux qui contiennent un corps C donné. On admet que pour un prélèvement quelconque, la probabilité qu'il contienne le corps C est π et l'on suppose que les prélèvements sont indépendants.

On répartit les prélèvements en a groupes d'effectifs b ($n = ab$) et pour chaque groupe, on constitue un mélange à l'aide de quantités égales de chacun des b prélèvements de ce groupe. Si ce mélange ne contient pas le corps C, une seule analyse aura établi qu'aucun des b prélèvements du groupe ne contient pas le corps C. Si ce mélange contient le corps C, il faut alors analyser séparément les b prélèvements pour déterminer ceux qui contiennent le corps C ; le nombre d'analyses faites pour le groupe est alors $b+1$.

On désigne par X, le nombre total d'analyses effectuées. Quels sont les valeurs possibles de X, en déterminer les probabilités. On pourra considérer la variable aléatoire intermédiaire $Y \stackrel{\text{def}}{=} \frac{X-a}{b}$ en introduisant $p \stackrel{\text{def}}{=} 1-(1-\pi)^b$.

3] **Changement de variable aléatoire**

Soit la variable aléatoire bidimensionnelle (X,Y) continue dont la densité de probabilité est définie par :

$$f_{X,Y}(x,y) = \theta^2 e^{-\theta x} \mathbb{1}_{0<y<x}(x,y),$$

où $\mathbb{1}_A(x,y)$ désigne la fonction indicatrice ($\mathbb{1}_A(x,y) = 1$ si $(x,y) \in A$ et $\mathbb{1}_A(x,y) = 0$ ailleurs.
3.1] Déterminer les lois de probabilités des variables aléatoires marginales X et Y.
3.2] On définit $Z \stackrel{\text{def}}{=} Y/X$. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Z.
3.3] Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire bidimensionnelle (X,Z). Les variables aléatoires X et Z sont elles indépendantes ?

Correction très succincte du premier contrôle de connaissance de PS11 (les références citées sont celles du résumé de cours du polycopié)

1] **Loi de Poisson**
D'après la formule des probabilités totales [I.7], en appelant les causes $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$, le nombre X de clients vaut i :

$$P(Y=k)=\sum_{i=0}^{+\infty}P(X=i)P(Y=k/X=i).$$

D'après la définition de la loi de Poisson : $P(X=i)=\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}$. Et d'après l'interprétation de la probabilité conditionnelle :

$$P(Y=k/X=i)=\begin{cases}0 & \text{si } i<k\\ C_i^k p^k(1-p)^{i-k} & \text{si } i\geq k\end{cases}$$

En conséquence $P(Y=k)$ devient :

$$\begin{aligned}P(Y=k) &= \sum_{i=k}^{+\infty}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}\frac{i!}{k!(i-k)!}p^k(1-p)^{i-k}\\ &= \frac{\lambda^k p^k}{k!}e^{-\lambda}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\lambda^j(1-p)^j}{j!}=\frac{\lambda^k p^k}{k!}e^{-\lambda}e^{\lambda(1-p)}=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda p},\end{aligned}$$

soit une loi de probabilité de Poisson de paramètre λp. Ce résultat est similaire à celui obtenu dans l'exercice de TD II.4 Introduction au processus de Poisson homogène, à propos du processus d'effacement.

2] **Loi Binomiale**

Puisqu'il y a a groupes d'effectifs b et que pour chacun de ces groupes 1 ou $b+1$ analyses sont effectuées, le nombre X d'analyses prend les valeurs $\{a, a+b, a+2b, ...a+kb, ..., a+ab\}$, soit les valeurs $X=a+Yb$ avec $Y\in\{0,1,...,a\}$ où Y représente le nombre de mélanges qui contiendront le corps C. Nous avons donc affaire à une suite de a expériences de Bernoulli indépendantes où l'événement considéré est {contient le corps C} a une probabilité de $1-(1-\pi)^b$ que l'on note p. Par suite la variable aléatoire Y suit une loi de probabilité Binomiale de paramètre (a,p) avec $p\overset{\text{def}}{=}1-(1-\pi)^b$. Puis

$$P(X=a+kb)=C_a^k[1-(1-\pi)^b]^k(1-\pi)^{b(a-k)}\qquad\text{pour}\quad k=0,1,...,a.$$

3] **Changement de variable aléatoire**

D'après [II.15],

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X,Y}(x,y)dy=\left(\int_0^x\theta^2e^{-\theta x}dy\right)\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)=\theta^2xe^{-\theta x}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x),$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X,Y}(x,y)dx=\left(\int_y^{+\infty}\theta^2e^{-\theta x}dx\right)\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y)=\theta[-e^{-\theta x}]_y^{+\infty}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y)=\theta e^{-\theta y}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y)$$

3.2] Par définition $Z\in]0,1[$ et sa fonction de répartition devient pour $z\in]0,1[$

$$\begin{aligned}F_Z(z) &= P(Z<z)=P(Y<zX)=\iint_{\Delta_z}f_{X,Y}(x,y)dxdy\ \text{ avec } \Delta_z\overset{\text{def}}{=}\{(x,y),0<y\leq zx\}\\ &= \int_0^{+\infty}\left[\int_0^{zx}\theta^2e^{-\theta x}dy\right]dx=\int_0^{+\infty}\theta^2e^{-\theta x}zxdx=z\int_0^{+\infty}\underbrace{\theta^2xe^{-\theta x}}_{\text{d.d.p. de }X}\ dx=z.\end{aligned}$$

Par suite la variable aléatoire Z est distribuée selon une loi de probabilité uniforme sur $]0,1[$: $f_Z(z) = \mathbb{1}_{]0,1[}(z)$.
3.3] Puisque la relation entre (X,Y) et (X,Z) est bijective et que la variable aléatoire (X,Y) est continue, la relation [II.21a] s'applique et :

$$\begin{aligned} f_{X,Z}(x,z) &= |\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & x \end{pmatrix}| f_{X,Y}(x,y)_{|x=x,y=zx} \\ &= x\theta^2 e^{-\theta x} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x) \mathbb{1}_{]0,1[}(z) \\ &= f_X(x) f_Z(z) \end{aligned}$$

Par suite les variable aléatoires X et Z sont indépendantes.