TELECOM SudParis
Institut TELECOM
CONTROLE DE CONNAISSANCES

Module MAT3002 : Probabilités (2ème session)
Durée : 1,5h
Sans document et sans calculatrice (une feuille manuscrite) A4 est autorisée
Date : 30 Mars 2009
Coordonnateur : DELMAS Jean Pierre

Nom : Prénom : Année (1,2,3)

Justifier chaque réponse de façon concise. Répondre sur le questionnaire même dans les limites qui vous sont proposées. Il est conseillé de faire un rapide brouillon sur une feuille à part avant de reporter votre réponse. Les quatre exercices sont indépendants.

1] **Jeu stupide**

On considère une règle de longueur unité que l'on casse au hasard en deux parties. Après avoir modélisé cette expérience aléatoire, déterminer la probabilité que la plus petite partie soit inférieure à a (avec $a < 1/2$).

2] **Analyse de sang**

Dans une population une proportion p (en pratique $p \ll 1$) de personnes sont atteintes d'une maladie détectable par analyse sanguine. Pour réduire le coût de cette analyse, on se propose une méthode d'examen collectif selon la stratégie suivante. On analyse le sang mélangé de n personnes. Si le résultat est négatif aucune de ces n personnes n'est atteinte de cette maladie, sinon on fait l'analyse individuelle du sang de ces n personnes. Dans ce dernier cas on fait alors $n+1$ analyses.

Soit X_n, la variable aléatoire représentant le nombre d'analyses nécessaires par groupe de n personnes, calculer $\mathrm{E}(X_n)$. En déduire le nombre moyen d'analyses à effectuer par personne. En déduire l'existence d'une valeur minimale n_0 de ce nombre moyen n d'analyse.

3] **Variable aléatoire gaussienne**

3.1] Soit X une variable aléatoire gaussienne centrée de variance unité. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} +X & \text{si } X \in]-\infty,-2] \cup [-1,+1] \cup [2,+\infty[\\ -X & \text{si } X \in]-2,-1[\cup]1,2[\end{cases}$.

Déterminer la loi de la variable aléatoire Y.

3.2] Que peut on dire de la loi de probabilité de la variable aléatoire bidimensionnelle (X,Y) ?

4] **Changement de variable aléatoire**

On considère la variable aléatoire (X,Y) de densité de probabilité

$$f_{X,Y}(x,y) = e^{-y} \mathbb{1}_{0 \le x \le y}$$

où $\mathbb{1}_A \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{si la condition } A \text{ est satisfaite} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

4.1] Déterminer les densités de probabilités marginales $f_X(x)$ et $f_Y(y)$

4.2] On considère la variable aléatoire (U,V) définie par $U \stackrel{\text{def}}{=} X+Y$ et $V \stackrel{\text{def}}{=} X-Y$. Déterminer la densité de probabilité $f_{U,V}(u,v)$.

4.3] En déduire les densités de probabilités marginales $f_U(u)$ et $f_V(v)$.

Correction très succincte du contrôle de connaissance de MAT3002 2ème session

1] **Jeu stupide**

Cette expérience aléatoire peut être modélisée par l'espace probabilisé $([0,1],\mathcal{B}([0,1]),P_u)$ où P_u désigne la probabilité uniforme sur $[0,1]$. Si l'on désigne par U cette variable aléatoire de loi de probabilité uniforme sur $[0,1]$, la plus petite partie sera la variable aléatoire X définie par

$$X = \begin{cases} U & \text{si } 0 < U < 1/2 \\ 1-U & \text{si } 1/2 < U < 1 \end{cases}$$

et $P(X<a) = P\left((0<U<a)\cup(0<1-U<a)\right) = P\left((0<U<a)\cup(1-a<U<1)\right) = 2a$.

2] **Analyse de sang**

D'après l'énoncé X_n est une variable aléatoire prenant les valeurs 1 avec la probabilité $(1-p)^n$ et $n+1$ avec la probabilité $1-(1-p)^n$. Par suite :

$$\mathrm{E}(X_n) = 1\times(1-p)^n + (n+1)\times(1-(1-p)^n) = 1+n-n(1-p)^n$$

et le nombre moyen d'analyses à effectuer par personne est $\frac{\mathrm{E}(X_n)}{n} = 1+\frac{1}{n}-(1-p)^n$.

Puisque $1+\frac{1}{n}$ et $(1-p)^n$ sont respectivement des fonctions monotones décroissante et croissante de n, il existera une seule valeur n_0 qui minimisera ce nombre moyen d'analyse.

Une analyse numérique plus fine montrerait que cette valeur optimale n_0 est une fonction décroissante de p et ce nombre moyen optimal d'analyse $\frac{\mathrm{E}(X_{n_0})}{n_0}$ est une fonction croissante de p. Par exemple pour $p=0.1$ on a $n_0=4$ et $\frac{\mathrm{E}(X_{n_0})}{n_0}=0.4$, alors que pour $p=0.01$ on a $n_0=11$ et $\frac{\mathrm{E}(X_{n_0})}{n_0}=0.2$.

3] **Variable aléatoire gaussienne**

3.1] Puisque le changement de variable aléatoire $Y \stackrel{\text{def}}{=} g(X)$ est bijectif et que X est une variable aléatoire continue, nous pouvons appliquer la formule du changement de variable aléatoire.

$$f_Y(y) = |\frac{dy}{dx}|^{-1} f_X(x)_{|x=g^{-1}(y)} = |\pm 1|^{-1} f_X(\pm x) = f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

car $f_X(x)$ densité de probabilité Gaussienne centrée est paire.

3.2] Considérons la combinaison linéaire particulière $Z \stackrel{\text{def}}{=} X+Y$. Alors

$$Z = \begin{cases} 2X & \text{si } X \in]-\infty,-2]\cup[-1,+1]\cup[2,+\infty[\\ 0 & \text{si } X \in]-2,-1[\cup]1,2[\end{cases}.$$

Par suite Z est une variable aléatoire mixte prenant la valeur discrète 0 avec $P(Z=0) = P(X\in]-2,-1[\cup]1,2[) \neq 0$. Donc la variable aléatoire (X,Y) n'est pas de loi gaussienne à deux dimensions. D'ailleurs le support de cette variable aléatoire est concentrée sur les 5 demi-droites du plan (x,y) $y=x$ pour $x\in]-\infty,-2]$, $x\in[-1,+1]$ et $x\in[2,\infty[$ et $y=-x$ pour $x\in]-2,-1[$ ou $x\in\cup]1,2[$.

4] **Changement de variable aléatoire**

4.1] Les densités de probabilités marginales de X et Y sont :

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \left(\int_x^{+\infty} e^{-y}dy\right)\mathbb{1}_{[0,\infty[}(x) = e^{-x}\mathbb{1}_{[0,\infty[}(x) \\ f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = \left(\int_0^{y} e^{-y}dx\right)\mathbb{1}_{[0,\infty[}(y) = ye^{-y}\mathbb{1}_{[0,\infty[}(y). \end{aligned}$$

4.2] D'après la formule du changement bijectif de variable aléatoire continue :

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u,v) &= \frac{1}{\left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}\right|} f_{X,Y}(x,y)_{|x=\frac{u+v}{2}, y=\frac{u-v}{2}} \\ &= \frac{1}{\left|\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right|} e^{-\frac{u-v}{2}} \mathbb{1}_{(u+v\leq 0)\cap(v\leq 0)} = \frac{1}{2} e^{-\frac{u-v}{2}} \mathbb{1}_{(u+v\leq 0)\cap(v\leq 0)} \end{aligned}$$

4.3] Par suite

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \left(\int_{-u}^{0} \frac{1}{2} e^{-\frac{u-v}{2}} dv\right) \mathbb{1}_{[0,\infty[}(u) = e^{-u/2}(1-e^{-u/2}) \mathbb{1}_{[0,\infty[}(u) \\ f_V(v) &= \left(\int_{-v}^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-\frac{u-v}{2}} du\right) \mathbb{1}_{[-\infty,0[}(v) = e^{v} \mathbb{1}_{[-\infty,0[}(v). \end{aligned}$$