INSTITUT NATIONAL
DES TELECOMMUNICATIONS
Ingénieurs 2ème Année 2007-2008

COMMUNICATIONS NUMÉRIQUES

CORRIGES D'EXERCICES

Yann FRIGNAC
Roger LAMBERTI
Frédéric LEHMANN
Marc URO

SOMMAIRE

1 Propriétés & DSP. 1
1.1 Modulation en bande de base 1
1.2 Codage NRZ, RZ 50%, Biphase ou Manchester. 4
1.3 Modulation étalée. 11
1.4 Codages Différentiel et Bipolaire. 12
1.5 Modulations MDP et MSK. 22
2 Détection 25
2.1 Signaux orthogonaux 25
2.2 Détection vectorielle 34
2.3 Seuils de détection optimaux 37
2.4 Réception optimale en optique cohérente 41
2.5 Modulation MAQ 8 44
2.6 Réponse partielle 47
3 Critère De Nyquist 52
3.1 Filtre adapté 52
3.2 Notion de filtre adapté 54
3.3 Critère de Nyquist en bande de base 56
3.4 Débits optimaux 58
3.5 Calcul d'énergie 60
3.6 Brouilleur sinusoïdal 62
4 Modulation Sur Fréquence Porteuse 63
4.1 Modulations en Phase et en Quadrature 63
4.2 Modulation M.S.K. 65
4.3 MDP2 Codée et 3MDF2. 71
4.4 Modulation Q^2PSK. 73
5 Canal Non Stationnaire. 76
5.1 Évanouissements par trajets multiples. 76
5.2 Canal de Rayleigh & Diversité. 80
5.3 OFDM sur Canal Dispersif. 91
5.4 Diversité de Réception. 93

Exercices préconisés lors des TD :

(Ceci n'empêche pas de faire les autres exercices en travail personnel)

Séance 1 : Exo 1.1 rapidement Exo 1.2 Codes Binaires NRZ et RZ Exo 1.4 differentiel.

But : Revoir et manipuler les propriétés élémentaires des symboles et calculer et comparer des DSP avec la formule de Bennett.

Séance 2 : Exo 1.5 MDP et MSK

But : Manipuler l'équivalent BdB. Calculer une DSP. Propriété de la MSK.

Séance 3 : Exo 2.5 MAQ-8.

But : Étude des MAQ et optimisation d'une constellation pour le récepteur optimal BABG, calcul de performances.

Séance 4 : Exos 3.5. et 3.6 Calcul d'énergie et Brouilleur sinusoïdal.

But : Comprendre le Critère de Nyquist en BdB et en Passe Bande. Filtres en cosinus surélevé.

Séance 5 : Exo 2.1 Signaux orthogonaux. (aller rapidement au début et sauter la question 5 mais finir l'exercice).

But : Définitions des signaux orthogonaux,exemples, calcul de leurs performances en BABG, tendances asymptotiques.

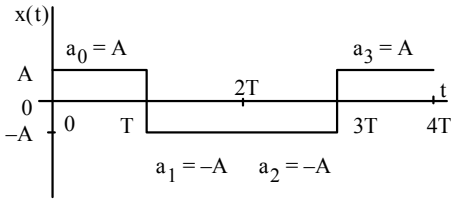
Séance 6 : Exo 5.2 (questions 1 à 3). Diversité sur canal de Rayleigh.

But : Problème du canal mobile, Principe et intérêt de la diversité. Calcul de performances.

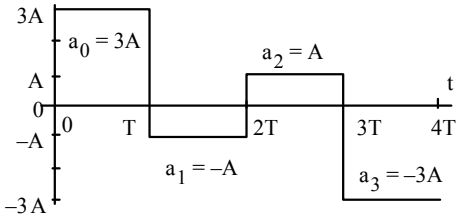
1 Propriétés & DSP.

1.1 Modulation en bande de base

① Représentation des signaux numériques binaires et quaternaires.



Signal numérique binaire



Signal numérique quaternaire

Pour simplifier les notations T=1.

② Pour $M = 2^m$ puisque dans ce cas le débit binaire et le débit Baud sont reliés par la relation : $D_b = D_s \cdot \log_2 M$, nous avons $D_b = D_s \cdot m$

③ L'énergie associée à un symbole a_0 fixé est définie par :

$$E_{a_0} = \int_{-\infty}^{+\infty} |a_0 g(t)|^2 \, dt = |a_0|^2 \int_0^T |g(t)|^2 \, dt = |a_0|^2$$

L'énergie moyenne par symbole est définie par :

$$E_s = \mathrm{E}\{E_{a_0}\} = \mathrm{E}\{|a_0|^2\} = \frac{2A^2}{M} \sum_{p=1}^{M/2} (2p-1)^2 = \frac{2A^2}{M} \cdot \frac{(M-1)M(M+1)}{6},$$

soit : $\mathrm{E}_s = A^2 \cdot \frac{M^2-1}{3}$

L'énergie moyenne par bit est donnée par : $\mathrm{E}_b = \frac{\mathrm{E}_s}{\log_2 M} = A^2 \frac{M^2-1}{3\log_2 M}$

La puissance moyenne émise est : $P_b = \mathrm{E}_b D_b = \mathrm{E}_s D_s = D_b A^2 \frac{M^2-1}{3\log_2 M}$

Puisque la fonction h(t) est normée, la distance minimale entre deux signaux est définie par :

$$d^2_{\min} = \min_{j \neq i} \left(\alpha_j - \alpha_i\right)^2 = 4A^2 \quad \text{ou} \quad d_{\min} = 2A$$

La distance minimale ne dépend pas de la taille de l'alphabet mais la puissance transmise est proportionnelle à $\dfrac{M^2-1}{Log_2 M}$.

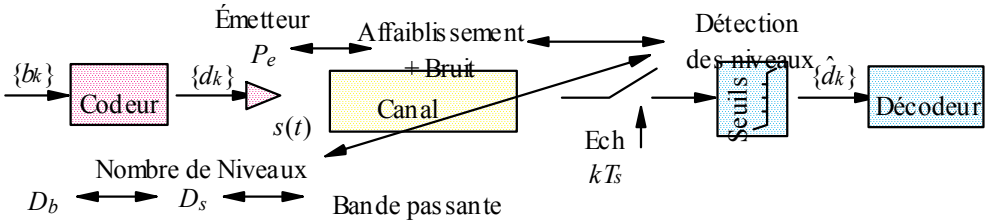
Transmettre un élément binaire supplémentaire par symbole $m' = m+1$, nécessite un alphabet de taille $M' = 2M$ et une puissance émise équivalente à

$$P'_{\mathrm{e}} = \frac{(4M^2-1)\log_2 M}{(M^2-1)(1+\log_2 M)} P_{\mathrm{e}}.$$

Exemple pour $M = 2$:

$P'_{\mathrm{e}} = \dfrac{15}{6} P_{\mathrm{e}}$, la puissance transmise est environ 3 fois plus importante.

④ Pour un débit binaire fixé (par le client) et une puissance émise fixée (lors de l'attribution d'un canal de transmission), le concepteur du modulateur peut déterminer la modulation telle que la distance minimale entre les signaux soit supérieure à une valeur minimale fixée.



L'énergie moyenne par symbole est définie par : $E_s = E_b \log_2 M$ avec : $E_b = \dfrac{P_e}{D_b}$

La valeur de A est définie à partir de E_b par : $A = \sqrt{E_b \dfrac{3\log_2 M}{M^2-1}}$

La distance minimale est définie par : $d_{\min} = 2A = 2\sqrt{E_b \dfrac{3\log_2 M}{M^2-1}}$

Pour M grand, transmettre un bit supplémentaire par symbole $m' = m+1$, conduit à choisir un alphabet à $M' = 2M$ symboles.

On obtient ainsi une distance minimale $d'_{\min} = \frac{d_{\min}}{2}$ pour une puissance émise identique.

Exemples pour $m = 1$ à $m = 4$ bit/symbole et ***A* constant**.

m	M	$E_s = A^2 \frac{M^2-1}{3}$	$E_b = A^2 \frac{M^2-1}{3\log_2 M}$	$d_{\min}$
1	2	A^2	A^2	$2A$
2	4	$5A^2$	$\frac{5}{2}A^2$	$2A$
3	8	$21A^2$	$7A^2$	$2A$
4	16	$85A^2$	$21.25A^2$	$2A$

Exemples pour $m = 1$ à $m = 4$ à **énergie moyenne par bit constante**.

m	M	$E_s = E_b \cdot \log_2 M$	E_b	$d_{\min} = 2\sqrt{E_b \frac{3\log_2 M}{M^2-1}}$
1	2	E_b	E_b	$2\sqrt{E_b}$
2	4	$2\ E_b$	E_b	$2\sqrt{E_b}\sqrt{2/5}$
3	8	$3\ E_b$	E_b	$2\sqrt{E_b}\sqrt{1/7}$
4	16	$4\ E_b$	E_b	$2\sqrt{E_b}\sqrt{4/85}$

1.2 Codage NRZ, RZ 50%, Biphase ou Manchester.

Un signal numérique en bande de base est représenté par la relation :

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} g_k(t-kT) \qquad \text{et dans le cas de la MIA} \quad x(t)=\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_k g(t-kT) \qquad (1)$$

$\{a_k\}$ est la suite des symboles transmis. Cette suite de variables aléatoires est stationnaire, ergodique, de moyenne m_a et de fonction de corrélation $R_a(m)$. $g(t)$ est la fonction de mise en forme spectrale, de transformée de Fourier $G(f)$. $1/T$ est le débit Bauds.

La densité spectrale de puissance du signal $x(t)$ (MIA ou PAM) est exprimée à partir de la formule de Bennett par :

$$S_x(f)=\frac{|G(f)|^2}{T}\cdot\left\{\sum_n\left(R_a(n)-|m_a|^2\right)\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fnT}+\frac{|m_a|^2}{T}-\text{Ш}_{\frac{1}{T}}(t)\right\}$$

Le spectre d'un signal numérique comporte une partie continue et un spectre de raie si la moyenne m_a des symboles est non nulle.

1.2.1 DSP des Codes NRZ, RZ 50%, Biphase, Manchester.

$\{a_k\}$ est une suite de variables aléatoires Indépendantes à valeurs dans :

a) $a_k \in \{-1,+1\}$, **b)** $a_k \in \{0,1\}$ et de probabilités a priori p & 1-p.

Si $p=1/2$ la suite I.I.D. (Indépendantes et Identiquement Distribuées) est de loi uniforme.

Pour les deux ensembles de valeurs **a)** et **b)** :

1) Quelle est la densité spectrale de puissance des codes NRZ et RZ50% ?

Il s'agit ici de MIA dont la DSP est donnée par la formule de Bennett.

$$S_x(f)=\frac{|G(f)|^2}{T}\cdot\left\{\sigma_a^2+\sum_{n\neq 0}\left(R_a(n)-|m_a|^2\right)\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fnT}+\frac{|m_a|^2}{T}\text{Ш}_{\frac{1}{T}}(f)\right\}$$

Un signal NRZ, (Non Retour à Zéro) est défini par : $g(t) = \begin{cases} A & t \in [0,T] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

$$|G(f)| = AT\,\mathrm{Sinc}(\pi f T)$$

Un signal RZ 50%, (Retour à Zéro à la moitié) est défini par : $g(t) = \begin{cases} A & t \in [0,\frac{T}{2}] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

$$|G(f)| = A\frac{T}{2}\mathrm{Sinc}\left(\pi f \frac{T}{2}\right)$$

La moyenne de la suite stationnaire $\{a_k\}$ est $m_a = \sum_{i=1}^{2} \alpha_i p_i$ $\begin{cases} \text{cas a)} & m_a = 1-2p \\ \text{cas b)} & m_a = 1-p \end{cases}$

La fonction de corrélation est $R_a(0) = \sum_{i=1}^{2} \alpha_i^2 p_i$ et $R_a(n) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \alpha_i \alpha_j^* p_{ij} = R_a^*(-n)$

Cas **a)** $a_k \in \{-1,+1\}$, $R_a(0) = 1$ et $R_a(n) = \mathrm{E}\{ a_k a_{k-n}^* \} = \mathrm{E}\{ a_k \}\mathrm{E}\{ a_{k-n}^* \} = |m_a|^2$

$$S_x(f) = \frac{|G(f)|^2}{T} \cdot \left\{ 1-(1-2p)^2 + \frac{(1-2p)^2}{T} \text{Ш}_{\frac{1}{T}}(f) \right\}$$

$$S_x(f) = \frac{|G(f)|^2}{T} \quad \text{si symboles équiprobables}$$

Cas **b)** $a_k \in \{0,1\}$ $R_a(0) = 1-p$ et $R_a(n) = |m_a|^2 = (1-p)^2$

$$S_x(f) = \frac{|G(f)|^2}{T} \cdot \left\{ 1-p-(1-p)^2 + \frac{(1-p)^2}{T} \text{Ш}_{\frac{1}{T}}(f) \right\}$$

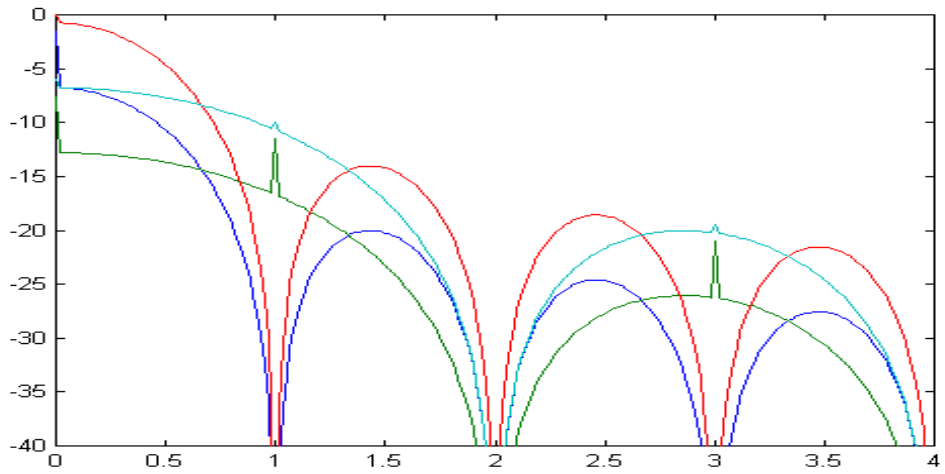


Figure 1. $p = 1/2$. *Code binaire (0,1) & (-1,+1) de formes NRZ & RZ50%*

2) Quelle est la puissance du signal contenue dans les parties du signal ayant respectivement un spectre de raies et un spectre continu ?

$P_s = \mathrm{E}_s \cdot D_s = \mathrm{E}_b \cdot D_b$

Binaire (-1,+1) NRZ : $\mathrm{E}_s = \mathrm{E}_b = A^2 T \cdot \dfrac{M^2 - 1}{3} = A^2 T$ & RZ50% : $\mathrm{E}_s = \mathrm{E}_b = A^2 \dfrac{T}{2}$

Pas de raies $P_{\mathrm{NRZ}} = \mathrm{E}_s \, D_s = A^2$ & $P_{\mathrm{RZ50\%}} = \mathrm{E}_s \, D_s = \dfrac{A^2}{2}$

Binaire (0,1) NRZ : $\mathrm{E}_s = \mathrm{E}_b = A^2 T (1-p)$ & RZ50% : $\mathrm{E}_s = \mathrm{E}_b = A^2 \dfrac{T}{2}(1-p)$

Puissance moyenne totale $P_{\mathrm{NRZ}} = \mathrm{E}_s \, D_s = A^2 (1-p)$

Une raie en zéro pour le NRZ de puissance $P_{\mathrm{raie}} = \dfrac{|G(0)|^2}{T} \cdot \dfrac{(1-p)^2}{T} = A^2 (1-p)^2$

Si $p = 1/2$ la moitié de la puissance émise est consommée dans un signal continu qui n'apporte aucune information sur la suite $\{a_k\}$

3) Quelle est la densité spectrale de puissance des codes Manchester et Biphase ?

Un code Manchester, est défini par les deux formes s_1, s_2, appliquées à du binaire :

$$s_1(t) = \begin{cases} A_0 & t \in [0, \dfrac{T}{2}] \\ A_1 & t \in [\dfrac{T}{2}, T] \end{cases}$$

Un code Biphase, est équivalent à un code Manchester avec : $A_1 = -A_0$ (forme de l'horloge) appliqué à du binaire symétrique $\{+1, -1\}$.

$$s_2(t) = \begin{cases} A_1 & t \in [0, \frac{T}{2}] \\ A_0 & t \in [\frac{T}{2}, T] \end{cases}$$

Le code biphase peut être traité comme une MIA $\{+1, -1\}$ avec une forme unique

$$g(t) = \begin{cases} +A & t \in [0, \frac{T}{2}] \\ -A & t \in [\frac{T}{2}, T] \end{cases} \quad \text{ou} \quad g(t) = +A \cdot \Pi_{\frac{T}{2}}(t - \frac{T}{4}) - A \cdot \Pi_{\frac{T}{2}}(t - \frac{3T}{4})$$

$$g(t) = A \cdot \Pi_{\frac{T}{2}}(t) * \left(\delta(t - \frac{T}{4}) - \delta(t - \frac{3T}{4}) \right) = A \cdot \Pi_{\frac{T}{2}}(t) * \left(\left(\delta(t + \frac{T}{4}) - \delta(t - \frac{T}{4}) \right) * \delta(t - \frac{T}{2}) \right)$$

$$G(f) = A \frac{T}{2} \mathrm{Sinc}\left(\pi f \frac{T}{2} \right) \cdot \left(\left(\mathrm{e}^{+j2\pi f \frac{T}{4}} - \mathrm{e}^{-j2\pi f \frac{T}{4}} \right) \cdot \mathrm{e}^{-j2\pi f \frac{T}{2}} \right)$$

$$|G(f)|^2 = A^2 T^2 \, \mathrm{Sinc}^2\left(\pi f \frac{T}{2} \right) \cdot \sin^2\left(\pi f \frac{T}{2} \right)$$

$$S_{Biphase}(f) = \frac{|G(f)|^2}{T} \cdot \left\{ 1 - (1-2p)^2 + \frac{(1-2p)^2}{T} \coprod_{\frac{1}{T}}(f) \right\}$$

$$S_{Biphase}(f) = \frac{|G(f)|^2}{T} \quad \text{si symboles équiprobables}$$

Code Manchester.

C'est un code à deux formes $\{s_1(t),\ s_2(t)\}$, il faut utiliser la formule de la FAC :

$$R_s(\tau) = \frac{1}{T_s} \left(\sum_i R_{s_i}(\tau) \cdot p_i + \sum_{n \neq 0} \left(\sum_i \sum_j R_{s_i s_j}(\tau - nT_s) \cdot p_{ij}(n) \right) \right)$$

$$R_{s_i s_j}(\tau) * \delta(\tau - nT) \xrightarrow{\text{TF}} S_i(f) \cdot S_j^*(f) \cdot \mathrm{e}^{-j2\pi fnT}$$

$$s_1(t) = \left(-A \cdot h(t) + B \cdot \Pi_T(t) \right) * \delta(t - \frac{T}{2}), \qquad s_2(t) = \left(+A \cdot h(t) + B \cdot \Pi_T(t) \right) * \delta(t - \frac{T}{2}),$$

$$A = \frac{A_1 - A_0}{2}, \quad B = \frac{A_1 + A_0}{2}, \qquad h(t) = +\Pi_{\frac{T}{2}}(t + \frac{T}{4}) - \Pi_{\frac{T}{2}}(t - \frac{T}{4})$$

$$S_1(f) = \left(-AH(f) + BT \, \mathrm{Sinc}(\pi fT) \right) \cdot \mathrm{e}^{-j\pi fT}, \quad S_2(f) = \left(+AH(f) + BT \, \mathrm{Sinc}(\pi fT) \right) \cdot \mathrm{e}^{-j\pi fT}$$

$$H(f) = jT\,\mathrm{Sinc}\left(\pi f \frac{T}{2}\right)\cdot \sin\left(\pi f \frac{T}{2}\right) = -H^*(f)$$

$$S_1(f)\cdot S_2^*(f) = \left(\ -A\cdot H(f) + BT\,\mathrm{Sinc}(\pi fT)\right)\cdot\left(\ +A\cdot H^*(f) + BT\,\mathrm{Sinc}(\pi fT)\right)$$

$$S_1(f)\cdot S_2^*(f) = -A^2\cdot\left|H(f)\right|^2 - ABT\,\mathrm{Sinc}(\pi fT)\left(2H(f)\right) + B^2T^2\,\mathrm{Sinc}^2(\pi fT)$$

$$S_2(f)\cdot S_1^*(f) = -\left|G(f)\right|^2 + ABT\,\mathrm{Sinc}(\pi fT)\left(2H(f)\right) + B^2T^2\,\mathrm{Sinc}^2(\pi fT)$$

$$\left|S_1(f)\right|^2 = \left|S_2(f)\right|^2 = +\left|G(f)\right|^2 + B^2T^2\,\mathrm{Sinc}^2(\pi fT)$$

La suite est à états indépendants : $p_{ij}(n) = p_i p_j\ ,\ \forall n \neq 0$

$p_{12}(n) = p_{21}(n) = p(1-p),\ \forall n \neq 0$. $p_{11}(n) = p^2,\ \forall n \neq 0$. $p_{22}(n) = (1-p)^2,\ \forall n \neq 0$.

Pour chaque terme de la somme sur *n* on a donc la même valeur qui se factorise :

$$\left|G(f)\right|^2\cdot\left(p^2 - 2p(1-p) + (1-p)^2\right) + B^2T^2\,\mathrm{Sinc}^2(\pi fT)\cdot\left(p^2 + 2p(1-p) + (1-p)^2\right)$$

soit $\left|G(f)\right|^2\cdot(1-2p)^2 + B^2T^2\,\mathrm{Sinc}^2(\pi fT)$

soit pour le spectre $T\cdot S_x(f) = \left(\left|G(f)\right|^2 + B^2T^2\,\mathrm{Sinc}^2(\pi fT)\right) +$

$$\left(\left|G(f)\right|^2\cdot(1-2p)^2 + B^2T^2\,\mathrm{Sinc}^2(\pi fT)\right)\cdot\left(-1 + \frac{1}{T}\text{Ш}_{\frac{1}{T}}(f)\right)$$

$$S_x(f) = \frac{\left|G(f)\right|^2}{T}4p(1-p) + \frac{(1-2p)^2}{T^2}\cdot\left|G(f)\right|^2\cdot\text{Ш}_{\frac{1}{T}}(f) + B^2\delta(0)$$

$$S_{Manchester}(f) = \frac{\left|G(f)\right|^2}{T}\cdot\left(4p(1-p) + \frac{(1-2p)^2}{T}\cdot\text{Ш}_{\frac{1}{T}}(f)\right) + B^2\delta(0)$$

$$S_{Manchester}(f) = \frac{\left|G(f)\right|^2}{T} + B^2\delta(0) \qquad \text{si équiprobables}$$

On retrouve la DSP du Biphase si $B = 0$.

1.2.2 Machine de Moore & chaîne de Markov

1.2.2.1 Utilisation des chaînes de MARKOV

Le calcul des $R_a(m)$ peut être fait rapidement par un calcul sur ordinateur, si le codeur est représentable par une chaîne de Markov. Un moyen simple consiste à utiliser une représentation déterministe du codeur sous la forme d'une machine d'états finis à temps discret et à états discrets. Cette machine "de Moore" est représentable par deux équations :

L'équation d'évolution de l'état et l'équation d'observation qui donne la sortie.

$$b_k \rightarrow x_k = \mathrm{f}(x_{k-1}, b_k) \rightarrow a_k = \mathrm{g}(x_k)$$

x_k est l'état à l'instant k, à valeurs dans un espace fini Ω. $x_k \in \Omega = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N\}$, $N \geq M$.

$\{b_k\}$ est une suite de variables aléatoires (parfois Indépendantes et équidistribuées I.I.D.) à valeurs dans un alphabet fini B.

f(.,.) est une application de $\Omega \times B \rightarrow \Omega$

L'équation d'observation : $a_k = \mathrm{g}(x_k)$. g(.) : $\Omega \rightarrow A$ est une application surjective.

a_k est le symbole de sortie du codeur (ou l'observation) à valeurs dans un espace fini A. Il ne dépend que de l'état x_k à l'instant k.

La suite des états $\{x_k\}$ $k \in \{0, +\infty\}$ forme une suite stationnaire Markovienne d'ordre 1.

La fonction de corrélation de la suite $\{b_k\}$ s'exprime par:

$$R_a(m) = \mathrm{E}\left\{a_k a_{k-m}^*\right\} = \sum_{a_k \in A} \sum_{a_{k-m} \in A} a_k a_{k-m}^* \Pr\left(a_k, a_{k-m}\right)$$

* représente le complexe conjugué.

L'application g(.) est surjective, la sommation peut s'exprimer sur l'espace Ω par:

$$R_a(m) = \mathrm{E}\left\{a_k a_{k-m}^*\right\} = \sum_{x_k \in \Omega} \sum_{x_{k-m} \in \Omega} \mathrm{g}\left(x_k\right) \mathrm{g}^*\left(x_{k-m}\right) \Pr\left(x_k, x_{k-m}\right)$$

$\Pr\left(x_k, x_{k-m}\right)$ est la loi jointe du couple d'états $\left(x_k, x_{k-m}\right)$

$$\Pr\left(x_k, x_{k-m}\right) = \Pr\left(x_k / x_{k-m}\right) \Pr\left(x_{k-m}\right)$$

1.2.2.2 Rappel des propriétés Markovienne

$$\Pr\left(x_k / x_{k-1},\ x_{k-2},\ \ldots\ldots,\ x_0\right) = \Pr\left(x_k / x_{k-1}\right)$$

d'où $\Pr\left(x_N,\ x_{N-1},\ \ldots,\ x_0\right) = \Pr\left(x_N / x_{N-1},\ x_{N-2},\ \ldots,\ x_0\right)\Pr\left(x_{N-1},\ \ldots,\ x_0\right)$

$$\Pr\left(x_N,\ x_{N-1},\ \ldots,\ x_0\right) = \Pr\left(x_N / x_{N-1}\right)\Pr\left(x_{N-1},\ \ldots,\ x_0\right)$$

Par récurrence

$$\Pr\left(x_N,\ x_{N-1},\ \ldots,\ x_0\right) = \prod_{k=1}^{N} \Pr\left(x_k / x_{k-1}\right)\Pr\left(x_0\right)$$

$$\Pr\left(x_k, x_{k-2}\right) = \sum_{x_{k-1}\in\Omega} \Pr\left(x_k, x_{k-1}, x_{k-2}\right) = \sum_{x_{k-1}\in\Omega} \Pr\left(x_k / x_{k-1}\right)\Pr\left(x_{k-1} / x_{k-2}\right)\Pr\left(x_{k-2}\right)$$

$$\Pr\left(x_k\right) = \sum_{x_{k-1}\in\Omega} \Pr\left(x_k, x_{k-1}\right) = \sum_{\xi_i\in\Omega} \Pr\left(x_k / x_{k-1} = \xi_i\right)\Pr\left(x_{k-1} = \xi_i\right)$$

On utilise la notation matricielle, qui est plus élégante:

P est la matrice d'éléments $p_{i/j} = \Pr\left(x_k = \xi_i / x_{k-1} = \xi_j\right)$. **P** est la matrice des probabilités de transitions entre états. C'est une matrice stochastique:

$$\begin{cases} \sum_j p_{ij} = 1 & \text{La somme des éléments d'une ligne est égale à 1.} \\ p_{ij} \geq 0 & \text{Les éléments sont positifs ou nuls.} \end{cases}$$

Si la chaîne est régulière :

D est une matrice diagonale d'élément $p_j = \Pr\left(x_\infty = \xi_j\right)$. $\mathbf{D} = Diag\left\{p_j\right\}$.

La matrice de probabilité de transitions entre x_{k-m} et x_k est $\mathbf{P}^m$.

Soit **a** le vecteur de composantes $g(x_k)$. $\mathbf{a}^T = [g(\xi_1), g(\xi_2), \ldots, g(\xi_N)]$.

La fonction de corrélation s'exprime sous forme matricielle par : $R_a(m) = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}^m \cdot \mathbf{a}^*$

Chaîne régulière : $\mathbf{p} = \mathbf{P}^\infty \cdot \mathbf{p}_{x_0}$, $\quad \forall \mathbf{p}_{x_0} \Rightarrow \mathbf{P}^\infty = \left[\mathbf{p} \,|\, \mathbf{p} \,|\, \cdots \,|\, \mathbf{p}\right]$

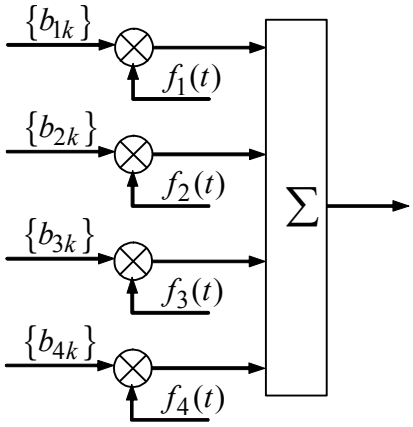
Chaîne stationnaire : $\mathbf{p} = \mathbf{P}^n \cdot \mathbf{p}$, $\quad \forall n$ (vecteur propre)

1.3 Modulation étalée.

On fait un multiplex de 4 voies de données $\{b_{ik}\}$ $(i=1,2,3,4)$ de même débit $D_i = D_b = 1$ Mbit/s .

Les voies de données sont binaires $b_{ik} \in \{\pm 1\}$ i.i.d équiprobables et indépendantes entre elles.

Chaque voie est étalée spectralement en multipliant chaque bit par la séquence $f_i(t)$ de chips NRZ, ($f_1(t) = ++++$ pour la voie 1, $f_2(t) = +-+-$,
$f_3(t) = ++--$, $f_4(t) = +--+$ pour la voie 4),
puis les voies sont additionnées.



1. Quel est le débit symbole en sortie du modulateur ?

Avec un symbole = 4 Chips : $D_s = D_b = D_{chip}/4$

Avec un symbole = 1 Chip : $D_s = D_{chip} = 4 \cdot D_b$

2. Quelle est l'énergie moyenne émise par symbole ?

Un symbole est formé de la superposition des quatre $f_i(t)$ (de quatre chips NRZ) de même énergie $E_i = 4A^2T_c = A^2T_b$.

Les signaux $f_i(t)$ sont orthogonaux.

Chaque forme est modulée ± 1 ce qui fait $2^4 = 16$ possibilités équiprobables.

$$E_s = \mathrm{E}\left\{\int_0^{T_b}\left|\sum_{i=1}^{4} b_i f_i(t)\right|^2 dt\right\} = \mathrm{E}\left\{\int_0^{T_b}\sum_{i=1}^{4} b_i^2 \left|f_i(t)\right|^2 dt\right\} = \frac{1}{16}\sum_{j=1}^{16}\left\{\int_0^{T_b}\sum_{i=1}^{4}\left|f_i(t)\right|^2 dt\right\} = 4A^2T_b$$

La transmission se fait sur un canal idéal BABG.

3. Quelle est la réponse impulsionnelle du filtre adapté de la voie *i* ?

$\Pi^*_{Tc}(-t)$: Forme NRZ pour le chip et multiplication par la séquence $f_i(t)$ appropriée.

4. Ce filtre vérifie-t-il les conditions de Nyquist de non IES ?

(à justifier mathématiquement)

Oui, voir cours (aspect temporel) (ici $h(t) = \Lambda_{2T_c}(t)$ et $H(1/2) \neq H(0)/2$)

1.4 Codages Différentiel et Bipolaire.

1.4.1 Codage Différentiel.

$\{b_k\}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{-1,+1\}$ de probabilités a priori respectives :

$$\Pr(b_k = 1) = p \quad \text{et} \quad \Pr(b_k = -1) = 1 - p\,.$$

La suite $\{a_k\}$ est crée à partir de la suite $\{b_k\}$ par un codage différentiel défini par la relation suivante : $a_k = a_{k-1} \cdot b_k$ ce qui est équivalent à $b_k = a_{k-1} \cdot a_k$ (règle de décodage).

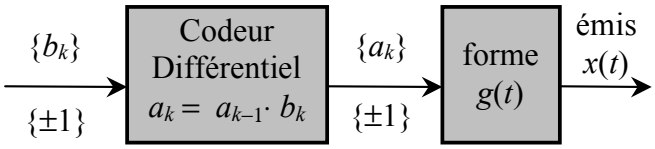


Figure 2. Codeur différentiel.

1) Quelle est la fonction de corrélation de la suite $\{a_k\}$?

$$\Pr(a_k = 1) = P(a_{k-1} = 1)\Pr(b_k = 1/a_{k-1} = 1) + \Pr(a_{k-1} = -1)\Pr(b_k = -1/a_{k-1} = -1)$$

Puisque a_{k-1} est fonction de b_k, b_{k-1}, b_{k-2}, …, a_0 et grâce à l'indépendance des variables aléatoires b_k et de a_0 , $\Pr(a_k = 1) = \Pr(a_{k-1} = 1)\Pr(b_k = 1) + \Pr(a_{k-1} = -1)\Pr(b_k = -1)$.

En supposant que la suite $\{a_k\}$ est stationnaire

(ce qui implique en particulier que $\Pr(a_{k-1} = 1) = \Pr(a_k = 1)$)

$$\Pr(a_k = 1) = P(a_{k-1} = 1) \cdot p + \big(1 - \Pr(a_{k-1} = -1)\big) \cdot (1 - p)$$

d'où : $$\Pr(a_k = 1) = \frac{1-p}{2-2p} = \frac{1}{2}, \quad \forall k$$

Par suite $\mathrm{E}(a_k) = \frac{1}{2} \cdot (+1) + \frac{1}{2} \cdot (-1) = 0$.

$$R_a(0) = \mathrm{E}\left(a_k^2\right) = 1, \qquad R_a(1) = \mathrm{E}\left(a_k a_{k-1}^*\right) = \mathrm{E}(b_k) = p - (1-p) = 2p - 1$$

pour $m > 0$, $R_a(m) = \mathrm{E}\left(a_k a_{k-m}^*\right) = \mathrm{E}\left(a_{k-1} a_{k-m}^* b_k\right) = R_a(m-1)\,\mathrm{E}(b_k) = (2p-1)^m$

puisque $R_a(m) = R_a^*(-m) \;\Rightarrow\; R_a(m) = (2p-1)^{|m|}$

2) Quelle est la densité spectrale de puissance du signal $x(t)$ défini par (1) ?

On utilisera les fonctions $g(t)$ RZ , NRZ et Horloge.

La densité spectrale du signal codé différentiellement est :

$$S_x(f) = \frac{|G(f)|^2}{T} \cdot S_a(f)$$

Soit hors formant : $S_a(f) = \sum_m R_a(m) \cdot \mathrm{e}^{-j2\pi fmT} = \sum_m (2p-1)^{|m|} \cdot \mathrm{e}^{-j2\pi fmT}$

$$S_a(f) = \sum_{m=0}^{+\infty} (2p-1)^m \cdot \mathrm{e}^{-j2\pi fmT} + \sum_{m=0}^{+\infty} (2p-1)^m \cdot \mathrm{e}^{+j2\pi fmT} - 1$$

$$S_a(f) = \frac{1}{1-(2p-1)\cdot \mathrm{e}^{-j2\pi fT}} + \frac{1}{1-(2p-1)\cdot \mathrm{e}^{+j2\pi fT}} - 1$$

Densité spectrale du code différentiel : $S_a(f) = \dfrac{4p(1-p)}{1-2(2p-1)\cos 2\pi fT + (2p-1)^2}$

Pour $\Pr(b_k = 1) = p = 1/2$, $S_a(f) = 1$. Le spectre du signal n'est pas modifié par le codage différentiel.

Pour $p = 0$, $b_k = -1$, la suite $\{a_k\}$ alterne systématiquement à la cadence $D_s = D_b$. Le code possède une raie en $f = D_s / 2$ qui correspond à l'horloge associée.

Pour $p = 1$, $b_k = +1$, le signal transmis est un signal continu qui vaut +1 ou –1 selon les conditions initiales. Il possède une raie en $f = 0$.

Calcul de la corrélation par les chaînes de Markov

La suite $\{b_k\}$ est à valeurs dans l'alphabet $B = \{-1, +1\}$

L'état caractérise la valeur du symbole précédent.

L'espace des états tel que $x_k \in \Omega = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N\}$ est choisi ici $\Omega = \{0,\ 1\}$.

L'espace des valeurs des symboles codés $a_k = \mathrm{g}(x_k)$ est $A = \{-1, +1\}$.

L'application f(.,.) de $\Omega \times B \rightarrow \Omega$ est :

$f(0,\ 0)=1 \quad f(0,\ 1)=0 \quad f(1,\ 0)=0 \quad f(1,\ 1)=1$

L'application g(.) est caractérisée par : $g(0)=-1 \quad g(1)=+1$.

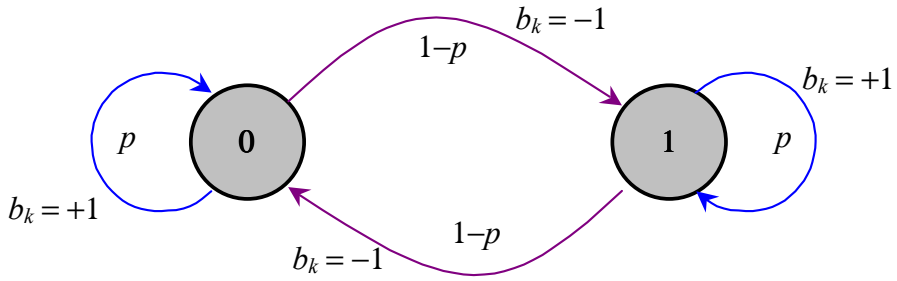


Figure 3. Graphe des transitions d'un codeur différentiel.

La matrice de probabilité de transitions est

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{P}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+(2p-1) & 1-(2p-1) \\ 1-(2p-1) & 1+(2p-1) \end{bmatrix}$$

On montre aisément que

$$\mathbf{P}^m=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+(2p-1)^m & 1-(2p-1)^m \\ 1-(2p-1)^m & 1+(2p-1)^m \end{bmatrix}$$

La matrice diagonale des probabilités à priori est : $\mathbf{D}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Les valeurs des symboles codés différentiellement sont : $\mathbf{a}=\begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix}$

Pour $m>0$, la fonction de corrélation des symboles a_k est caractérisée par :

$$R_a(m)=\mathbf{a}^T\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{P}^m\cdot\mathbf{a}^*=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & +1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1+(2p-1)^m & 1-(2p-1)^m \\ 1-(2p-1)^m & 1+(2p-1)^m \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

$$R_a(m)=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & +1 \end{bmatrix}\cdot 2\begin{bmatrix} -(2p-1)^m \\ +(2p-1)^m \end{bmatrix}=+(2p-1)^m$$

Par symétrie $R_a(m)=R_a^*(-m) \ \Rightarrow \ R_a(m)=(2p-1)^{|m|}$

Signal sans forme, $$S_a(f) = \frac{4p(1-p)}{1-2(2p-1)\cos 2\pi fT + (2p-1)^2}$$

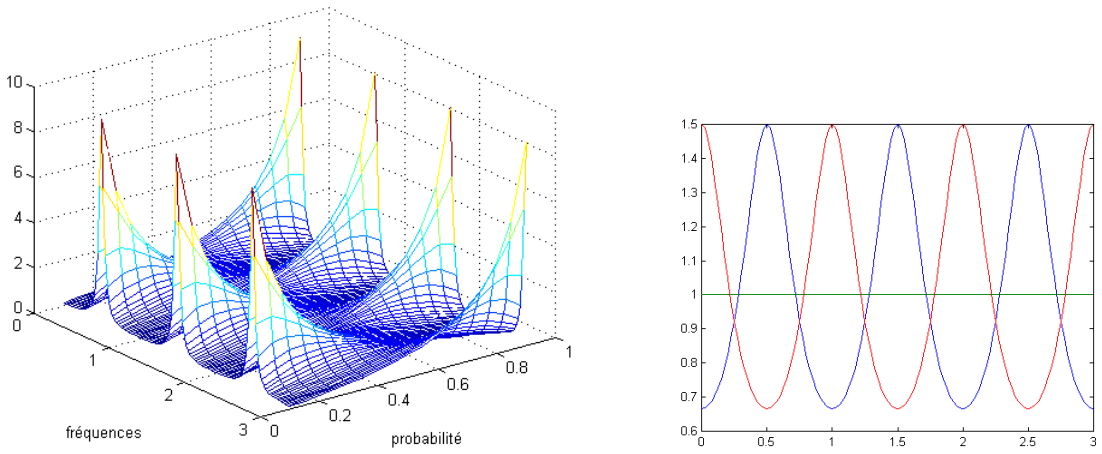


Figure 4. Fonction $S_a(f)$ du code différentiel $a_k = a_{k-1}b_k$, $a_k \in \{\pm 1\}$.

Signal NRZ différentiel, $$S_x(f) = A^2 T \,\mathrm{Sinc}^2(\pi fT) \cdot S_a(f)$$

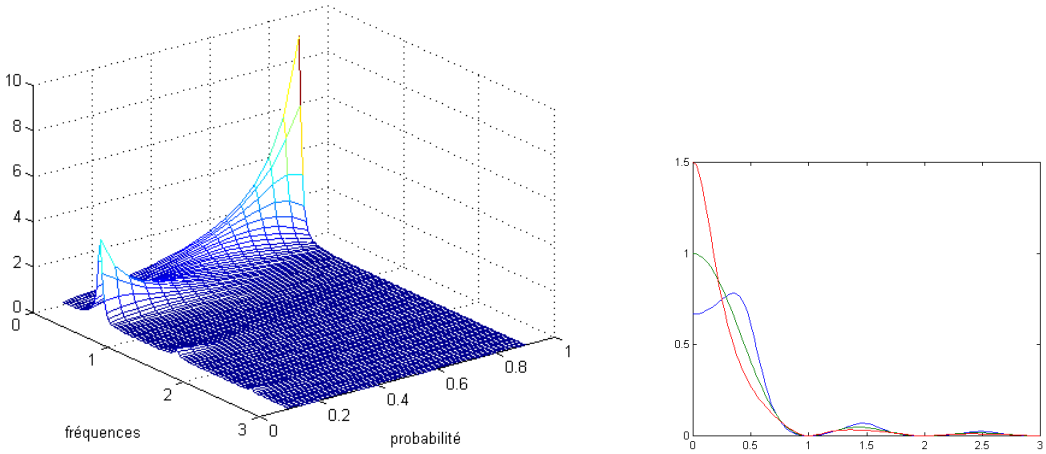


Figure 5. DSP du code NRZ différentiel, $a_k \in \{\pm 1\}$. Coupes en $p = 0.4,\ 0.5\ \ 0.6$

Signal RZ 50% différentiel, $$S_x(f) = A^2 \frac{T}{4} \mathrm{Sinc}^2\left(\pi f \frac{T}{2}\right) \cdot S_a(f)$$

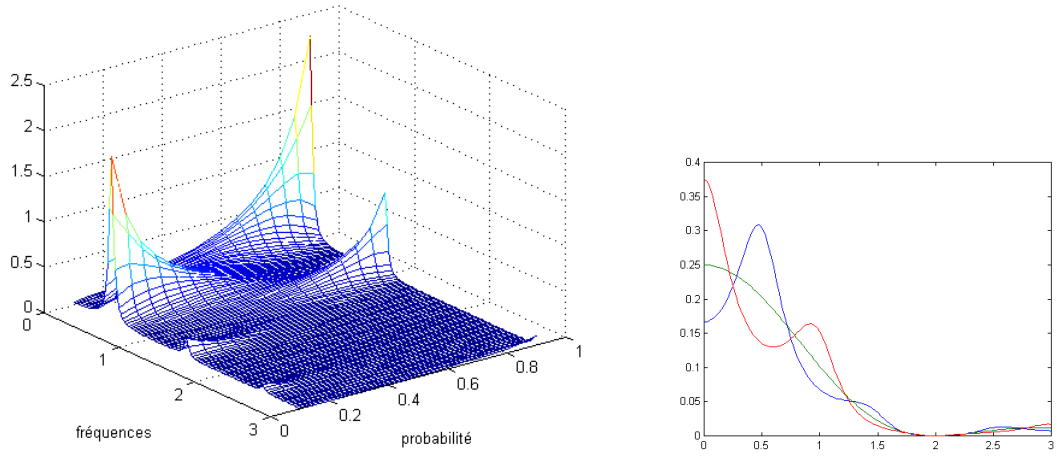


Figure 6. DSP du code RZ différentiel, $a_k \in \{\pm 1\}$. *Coupes en* $p = 0.4,\ 0.5\ \ 0.6$.

Signal Biphase différentiel, $$S_x(f) = A^2 T\, \mathrm{Sinc}^2\left(\pi f \frac{T}{2}\right) \cdot \sin^2\left(\pi f \frac{T}{2}\right) \cdot S_a(f)$$

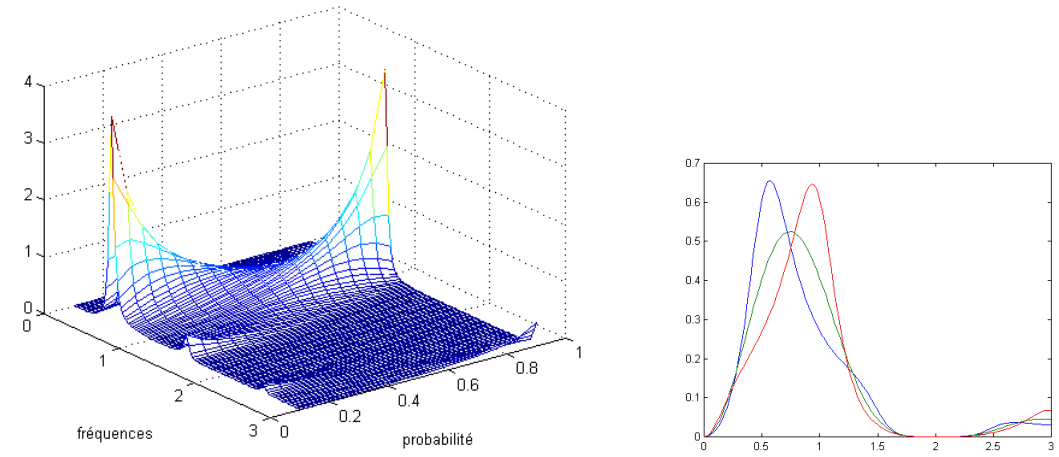


Figure 7. DSP du code Biphase différentiel. Coupes en $p = 0.4,\ 0.5\ \ 0.6$.

On remarque l'annulation du spectre au voisinage de la fréquence zéro. Annulation qui est due à la forme Horloge ou Biphase.

1.4.2 Codage Bipolaire.

Le code bipolaire RZ50%, à pour impulsion : $g(t) = \begin{cases} A & t \in [0, \frac{T}{2}] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

La suite binaire $\{b_k\}$ est une suite de symboles indépendants à valeurs dans $B = \{+1, -1\}$.

La suite ternaire $\{a_k\}$ prend ses valeurs dans $A = \{+1, 0, -1\}$.

Les symboles a_k sont définis à partir des symboles b_k par un codage bipolaire :

$$\begin{cases} \text{si } b_k = +1 \text{ alors } a_k = \pm 1 & \text{altenativement} \\ \text{si } b_k = -1 \text{ alors } a_k = 0 \end{cases}$$

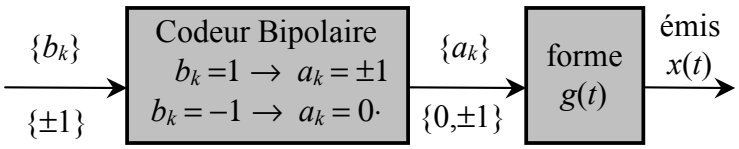
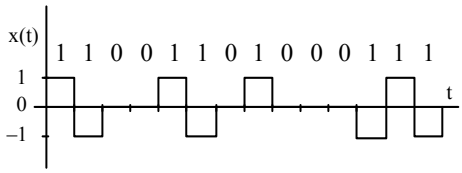
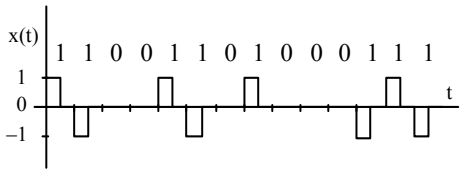


Figure 8. Codeur bipolaire d'ordre 1.



Bipolaire d'ordre 1 forme NRZ



Bipolaire d'ordre 1 forme RZ 50%

1) $p = \Pr(b_k = 1)$. Quelle est la fonction de corrélation de la suite $\{b_k\}$?

Ergodisme : la moyenne des symboles a_k est nulle puisqu'ils sont alternativement +1 et −1.

$$R_a(0) = \mathrm{E}\left\{a_k^2\right\} = p$$

$$R_a(1) = \mathrm{E}\left\{a_k a_{k-1}^*\right\} = \sum_{a_{k-1} \in A} \sum_{a_k \in A} a_k a_{k-1}^* \Pr(a_k / a_{k-1}) \Pr(a_{k-1})$$

Les seuls termes non nuls correspondent aux événements $a_k = -a_{k-1}$, qui sont caractérisés par $a_k a_{k-1} = -1$, $a_{k-1} = \pm 1$ et $b_k = +1$.

$$\Pr(a_k = +1 / a_{k-1} = -1) = \Pr(a_k = -1 / a_{k-1} = +1) = \Pr(b_k = +1) = p$$

$$\Pr(a_{k-1} = -1) = \Pr(a_{k-1} = +1) = p/2$$

Soit le cœfficient de corrélation :

$$R_a(1) = -\Pr(a_{k+1} = +1 / a_k = -1)\Pr(a_k = -1) - \Pr(a_{k+1} = -1 / a_k = +1)\Pr(a_k = +1) = -p^2$$

$$R_a(m) = \mathrm{E}\left\{a_k a_{k-m}^*\right\} = \sum_{a_{k-m} \in A} \sum_{a_k \in A} a_k a_{k-m}^* \Pr(a_k / a_{k-m}) \Pr(a_{k-m})$$

Les seuls termes non nuls correspondent aux événements :

$a_k = -a_{k-m}$, qui sont caractérisés par $a_k a_{k-m} = -1$, $a_{k-m} = \pm 1$ et il y a un nombre pair de 1 dans la suite $b_{k-1}, \ldots, b_{k-m+1}$.

$a_k = +a_{k-m}$, qui sont caractérisés par $a_k a_{k-m} = +1$, $a_{k-m} = \pm 1$ et il y a un nombre impair de 1 dans la suite $b_{k-1}, \ldots, b_{k-m+1}$.

Par symétrie sur la valeur de a_{k-m},

$$R_a(m) = 2\Pr(a_{k-m} = +1) \cdot \left(\Pr(a_k = +1 / a_{k-m} = +1) - \Pr(a_k = -1 / a_{k-m} = +1)\right)$$

$$R_a(m) = p \cdot \begin{pmatrix} \Pr\{b_k = 1\} \cdot \Pr(\text{il y a un nombre impair de 1 dans la suite } b_{k-1}, \ldots, b_{k-m+1}) \\ -\Pr\{b_k = 1\} \cdot \Pr(\text{il y a un nombre pair de 1 dans la suite } b_{k-1}, \ldots, b_{k-m+1}) \end{pmatrix}$$

$$R_a(m) = p^2 \cdot \left(1 - 2\Pr(\text{il y a un nombre pair de 1 dans la suite } b_{k-1}, \ldots, b_{k-m+1})\right)$$

$$R_a(m) = p^2 \cdot \left(1 - 2\sum_{k=0}^{\mathrm{int}(m/2)} C_m^{2k} p^{2k} (1-p)^{(m-2k)}\right) = p^2 \cdot (1-2p)^m$$

Pour $m \geq 2$, $C_m^{2k} = \dfrac{m!}{2k!(m-2k)!}$ est le nombre de permutations de $2k$ parmi m.

2) $p = 1/2$. Quelle est la densité spectrale du code bipolaire RZ50% ?

Si $p = 1/2$ alors Il existe le même nombre de suite ayant un nombre pair de 1 que de suite en comportant un nombre impair donc : $\begin{cases} R_a(0) = \dfrac{1}{2}, \; R_a(1) = -\dfrac{1}{4} \\ R_a(m) = 0 \;\; \forall m \neq 0 \;\text{ et }\; \pm 1 \end{cases}$

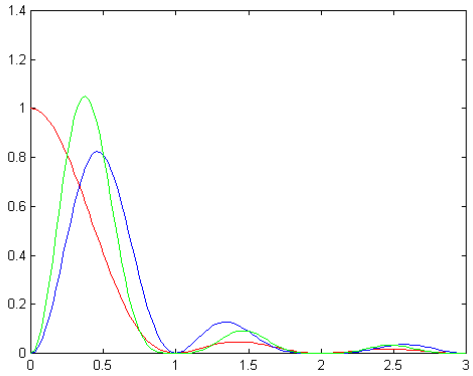
Il s'agit ici de MIA dont la DSP est donnée par la formule de Bennett.

$$S_x(f)=\frac{|G(f)|^2}{T}\cdot\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\left(\ \mathrm{e}^{+\mathrm{j}2\pi fT}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fT}\right)\right\}=\frac{|G(f)|^2}{T}\cdot\left\{\frac{1-\cos(2\pi fT)}{2}\right\}$$

Avec la forme RZ 50%, (Retour à Zéro) : $g(t)=\begin{cases} A & t\in[0,\frac{T}{2}] \\ 0 & \text{ailleurs}\end{cases}$, $|G(f)|=A\frac{T}{2}\mathrm{Sinc}\left(\pi f\frac{T}{2}\right)$.

$$S_x(f)=\frac{A^2T}{4}\mathrm{Sinc}^2\left(\pi f\frac{T}{2}\right)\cdot\sin^2(\pi fT)$$

Tracé en Linéaire.



Tracé en décibel.

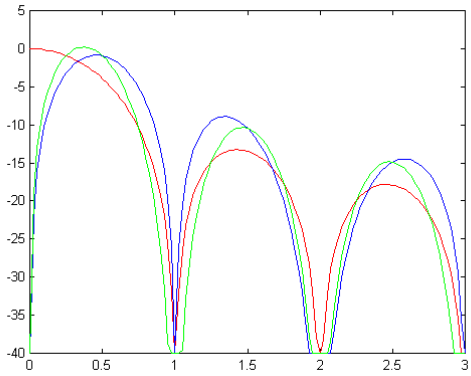


Figure 9. DSP des Codes Bipolaires NRZ, RZ50% et Binaire 1/2 Baud.

Calcul de la corrélation du code bipolaire par les chaînes de Markov

Le graphe représentant la chaîne de Markov du codeur bipolaire est ci-dessous Figure 10.

Il faut mémoriser si le symbole à transmettre doit être 0, +1 ou −1. Lorsque l'on transmet un +1 ou un −1, il faut se souvenir de la valeur du symbole −1 ou +1 transmis précédemment.

La suite $\{b_k\}$ est à valeurs dans l'alphabet $B=\{+1,\ -1\}$

L'espace des valeurs des symboles codés $a_k=\mathrm{g}(x_k)$ est $A=\{+1,\ 0,\ -1\}$.

L'espace des états tel que $x_k\in\Omega=\{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_N\}$ est choisi ici $\Omega=\{+1,\ 0^+,\ 0^-,\ -1\}$.

L'état noté 0^+ correspond à l'émission d'un 0 (ou d'un -1 binaire), le 1 (+1 binaire) émis précédemment étant $+1$.

L'état noté 0^- correspond à l'émission d'un 0, le 1 émis précédemment étant -1.

L'état noté $+1$ correspond à l'émission d'un $+1$ (+1 binaire).

L'état noté -1 correspond à l'émission d'un -1 (+1 binaire).

L'application f(.,.) de $\Omega \times B \rightarrow \Omega$ est caractérisée par :

$$f(0^+, -1) = 0^+, \quad f(0^-, -1) = 0^-, \quad f(0^+, +1) = -1, \quad f(0^-, +1) = +1$$

$$f(+1, +1) = -1, \quad f(+1, -1) = 0^+, \quad f(-1, -1) = 0^-, \quad f(-1, +1) = -1$$

L'application g(.) est caractérisée par :

$$g(0^+) = 0, \quad g(0^-) = 0, \quad g(+1) = +1, \quad g(-1) = -1.$$

Les états sont dans l'ordre $+1,\ 0^+,\ 0^-,\ -1$

La matrice des probabilités de transitions est : $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & p & p \\ 1-p & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 1-p \\ p & p & 0 & 0 \end{bmatrix}$

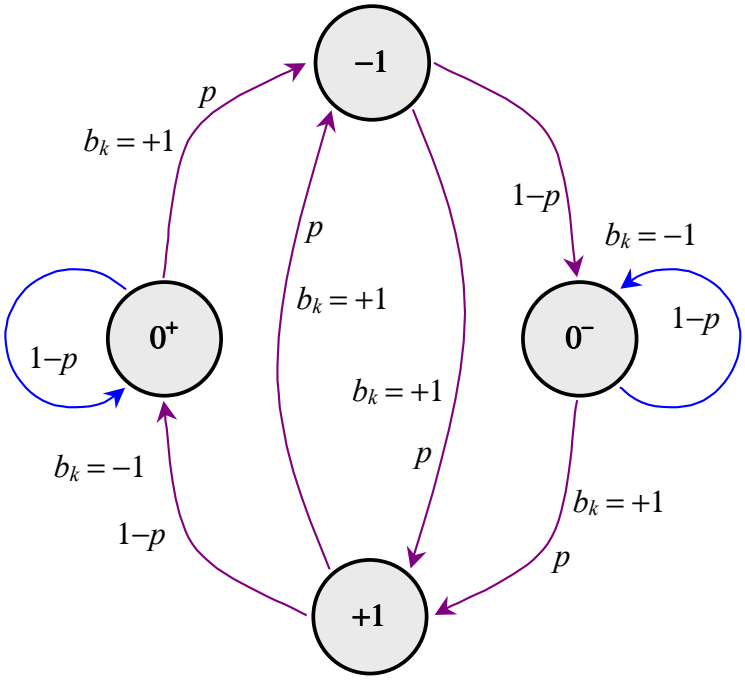


Figure 10. Graphe de transition du codeur bipolaire d'ordre 1.

Pour $p = 1/2$: $\mathbf{P} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

La matrice des probabilités de deux transitions est : $\mathbf{P}^2 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{P}^\infty$

$\mathbf{D} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ est la matrice diagonale des probabilités à priori.

Les valeurs des symboles codés sont : $\mathbf{a}^T = [+1 \quad 0 \quad 0 \quad -1]$

Pour $m = 0$, la fonction de corrélation des symboles a_k est caractérisée par :

$$R_a(0) = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{a}^* = \frac{1}{4}\ [+1 \quad 0 \quad 0 \quad -1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} +1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}$$

Pour $m = 1$, la fonction de corrélation des symboles a_k est caractérisée par :

$$R_a(1) = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}^* = \frac{1}{8}\ [+1 \quad 0 \quad 0 \quad -1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} +1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$R_a(1) = \frac{1}{8}\ [+1 \quad 0 \quad 0 \quad -1] \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \\ -1 \\ +1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{4}$$

Pour $m > 1$, la fonction de corrélation des symboles a_k est caractérisée par :

$$R_a(m) = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}^m \cdot \mathbf{a}^* = \frac{1}{16}\ [+1 \quad 0 \quad 0 \quad -1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} +1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

Par symétrie $R_a(m) = R_a^*(-m)$

1.5 Modulations MDP et MSK.

$$s(t) = \sum_k g(t - kT_s) \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\omega_0 t + \phi_k)$$

En enveloppe complexe, la modulation PSK est définie par :

$$d_k = \cos\phi_k + j\sin\phi_k = e^{j\phi_k} \qquad \phi_k \in \left\{ 0,\ \frac{2\pi}{M},\ \frac{4\pi}{M},\ \cdots,\ (M-1)\frac{2\pi}{M} \right\} = \{\theta_i;\ i = 1,\ldots,M\}$$

soit $\mathrm{E}\left\{ |d_k|^2 \right\} = \sum_{i=1}^{M} \left| e^{j\theta_i} \right|^2 \cdot \frac{1}{M} = 1$ et $m_d = 0$

La fonction de mise en forme est : $g(t) = \frac{A}{\sqrt{T_s}} \cdot \Pi_{T_s}(t)$

Ce qui donne la densité spectrale bilatérale de l'enveloppe complexe d'une modulation PSK : $S_{\alpha_s}(f) = E_s \mathrm{Sinc}^2(\pi f T_s)$ avec $E_s = E\left\{|d_k|^2\right\} \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2\, dt = A^2$

Le signal réel associé, centré sur la fréquence porteuse f_0, a pour densité spectrale :

$$S_x(f) = \frac{1}{2}\left\{ S_{\alpha_x}(f - f_0) + S_{\alpha_x}(-f - f_0) \right\}$$
$$= \frac{E_s}{2}\left(\mathrm{Sinc}^2\left(\pi(f - f_0)T\right) + \mathrm{Sinc}^2\left(\pi(-f - f_0)T\right) \right)$$

La densité spectrale à la fréquence porteuse est $S_x(f_0) \approx \frac{E_s}{2}$

Les maxima des lobes secondaires de la fonction sinus cardinal au carré sont à -13 dB, -17.5 dB , -21 dB et -23 dB.

Énergie par élément binaire $E_b = 2.10^{-3}$ Joule

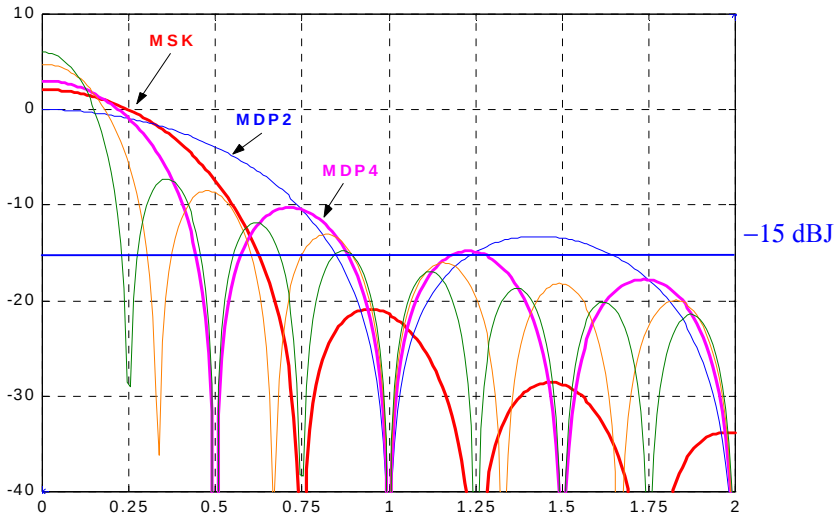
Temps bit $T_b = 1$ ms. Temps symbole $T_s = T_b \log_2 M$. $S(f_0)_{\mathrm{dB}} = 10\log_{10}(E_s/2)$

	MDP-2	MDP-4	MDP-8	MDP-16	unités
M	2	4	8	16	états
$E_s = E_b \log_2 M$	2. 10^{-3}	4. 10^{-3}	6. 10^{-3}	8. 10^{-3}	Joule
$S(f_0) = E_s/2$	10^{-3}	2. 10^{-3}	3. 10^{-3}	4. 10^{-3}	Joule
$S(f_0)_{\mathrm{dB}} = 10\log_{10}(E_s/2)$	–30	–27	–25	–23	dBJ
Lobe Max extérieur	–13	–17,5	–21	–24	dB
DSP max extérieur	–43	–44,5	–46	–47	dBJ

Largeur de bande du canal $B = 2.10^3$ Hz

Pour satisfaire les conditions de densité spectrales –45 dBJ extérieures à la bande du canal, il faut utiliser une modulation MDP-8. Elle sera peu performante.

Le gain obtenu en augmentant le nombre d'états de la modulation n'est pas très important.



Modulations MDP2, MDP4, MDP8, MDP16 et MSK.
(Densités spectrales des enveloppes complexes, le trait correspond aux -45 dBJ)

2) Utilisation de la modulation MSK

La modulation MSK, en équivalent en bande de base, est caractérisée par:

$$\alpha_x(t) = A \cdot \left(\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_{2k} g(t-2kT) + j \cdot \left(\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_{2k+1} g(t-(2k+1)T) \right) \right) \qquad a_k \in \{-1, +1\}$$

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \cos \frac{\pi t}{2T} \cdot \Pi_{2T}(t) \quad \text{soit} \quad G(f) = \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{4T \cos(2\pi f T)}{\pi \left(1 - 16T^2 f^2\right)}$$

La modulation M.S.K., en équivalent en bande de base, peut être représentée par la relation :

$$\alpha_x(t) = A \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n g(t-nT) \qquad \text{avec} \quad c_{2k} = a_{2k} \quad \text{et} \quad c_{2k+1} = j \cdot a_{2k+1}$$

La suite $\{c_n\}$ est I.I.D. on montre que : $R_c(m) = E\left\{c_n c_{n-m}^*\right\} = \delta_{m,0}$

$$E_s = E_b = A^2 E\left\{|c_k|^2\right\} \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 \, dt = A^2$$

formule de Bennett : $$S_{\alpha_x}(f) = A^2 \frac{|G(f)|^2}{T} \cdot \left\{\sigma_c^2\right\} = A^2 \frac{|G(f)|^2}{T} = E_s \frac{16\cos^2(2\pi fT)}{\pi^2 \left(1-16T^2 f^2\right)^2}$$

La densité spectrale du signal réel est définie à partir de celle de l'enveloppe complexe associée:

$$S_x(f) = \frac{1}{2}\left\{S_{\alpha_x}(f-f_0) + S_{\alpha_x}(-f-f_0)\right\} \quad \Rightarrow \quad S_x(f_0) \approx \frac{8E_s}{\pi^2}$$

$B = 2.10^3$ Hz, $D_b = D_s = \frac{1}{T} = 1$ kbit/s et $E_b = 2.10^{-3}$ Joule

$$S_x(f_0) \approx \frac{8E_b}{\pi^2} = 1.6\ 10^{-3}\ \text{J} = -28\ \text{dBmJ}$$

$$S_x\left(f_0 \pm \frac{B}{2}\right) = S_x\left(f_0 \pm \frac{1}{T}\right) \approx E_b \frac{8}{\pi^2\ (1-16)^2} = \frac{8E_b}{255\pi^2} = 0.71\ 10^{-5}\ \text{J} = -51.5\ \text{dBmJ}$$

La modulation M.S.K. est à enveloppe constante.

Elle satisfait les contraintes de densité spectrale hors bande. D'autre part son spectre décroît en $\frac{1}{f^4}$, plus rapidement que celui d'une modulation MDP.

Il existe, d'autre part, des modulations de fréquence à phase continue (TFM Tamed Frequency Modulation, GMSK Gaussian Minimum Shift Keying) d'indice 1/2, dont la densité spectrale décroît beaucoup plus rapidement que celle de la MSK. Le récepteur est équivalent à celui de la MSK et les performances en présence de bruit Gaussien blanc additif sont également équivalentes.

3) La densité spectrale d'une modulation MAQ est identique à celle d'une modulation MDP à même nombre d'états.

Remarque: Si on s'affranchit de la contrainte d'enveloppe constante, on peut transmettre avec une densité spectrale d'émission en cosinus surélevé de densité spectrale nulle en dehors de la bande $\frac{1+\rho}{T_s}$.

La modulation MDP-4 avec un cœfficient de retombé $\rho = 1$ satisfait les contraintes de densité spectrale hors bande.