Institut National des Télécommunications – Télécom INT

Contrôle de Connaissances

Module : Théorie de l'Information **Date : 13 novembre 2006**

Durée : 1h30 **Coordinateur : F. Desbouvries**

Documentation : le formulaire joint *A L'EXCLUSION DE TOUT AUTRE DOCUMENT.*

- Seules les réponses **justifiées** seront prises en compte.
- **Répondre sur le questionnaire même**, si possible dans les limites qui vous sont proposées (il est recommandé de faire un rapide brouillon sur une feuille à part avant de reporter votre réponse). Les trois exercices sont « indépendants » (mais non identiquement distribués).
- **Ne perdez pas de temps** : si vous êtes bloqué sur une question, passez rapidement à une autre question.

EXERCICE 1.

Soit $\{U_n\}$ la chaîne de Markov à 3 états 0, 1, 2, de matrice de transition :

	$U_n = 0$	$U_n = 1$	$U_n = 2$
$U_{n-1} = 0$	0	1	0
$U_{n-1} = 1$	0 ,5	0	0,5
$U_{n-1} = 2$	0,5	0	0,5

1. Calculer l'entropie du processus aléatoire $\{U_n\}$.

2. Effectuer un codage de Huffmann de l'extension d'ordre 2 de la source (considérée pour *n* suffisamment grand). Le code obtenu est-il un code préfixe ? En déduire le nombre moyen de bits utilisés pour coder un symbole ternaire de $\{U_n\}$.

3. On définit $\{V_n\}$ à partir de $\{U_n\}$ par la correspondance : $V_n = U_n$ modulo 2. Cette transformation peut être modélisée par un canal *C* à trois entrées et à deux sorties . Calculer la capacité de *C*.

EXERCICE 2.

Soit le code linéaire en bloc de matrice génératrice $\mathbf{G} = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & y & z \end{array}\right]$.

(P.S. dans cette notation les codes sont considérés comme des vecteurs lignes. Si en TDs vous avez manipulé des vecteurs colonnes vous pouvez bien sûr adopter la convention correspondante si cela vous facilite la tâche.)

1. On souhaite que ce code détecte et corrige automatiquement toute configuration d'une erreur sur un mot de code. Quelles sont les valeurs possibles de (x,y,z) ?

On suppose désormais que $(x,y,z) = (1,0,1)$.

2. Ecrire la table de codage.

3. Ecrire la matrice de contrôle **H** associée à **G**. A quoi sert cette matrice ?

4. Etant donné la taille de la matrice **G**, combien de configurations de deux erreurs ce code permettra-t-il de corriger automatiquement ?

5. Expliciter la table de décodage (***justifiez votre réponse***).

6. Le récepteur reçoit le mot [0 1 0 0 1]. Quel mot de code a été émis ?

EXERCICE 3. *Le taux d'entropie d'un chien qui cherche un os.*

Un chien se déplace sur l' ensemble des entiers relatifs. A chaque instant il fait un pas (vers la gauche ou vers la droite), et sa position est incrémentée ou décrémentée d'une unité. Par ailleurs, à tout instant il peut changer de direction avec une probabilité p = 0,1 ; les changements de direction sont indépendants. Le chien démarre à l'instant 0 en position 0, et la première étape a autant de chances d'être $+1$ que -1. Un chemin typique suivi par le chien est, par exemple :

$$(X_0, X_1, X_2 ...) = (0,-1,-2,-3,-4,-3,-2,-1,0,+1,+2,...)$$

1. Calculer $H(X_1, \cdots X_n)$.

2. Calculer le taux d'entropie de ce chien vagabond (c'est-à-dire l'entropie du processus aléatoire $X = \{X_n\}_{n=1}^{+\infty}$).

3. Quel est le nombre moyen de pas que fait le chien avant de changer de direction ?

FORMULAIRE

$$H(E) = -\log P(E) \qquad H(E \cap F) = H(E) + H(F/E)$$

$$I(E,F) = H(E) - H(E/F) = H(F) - H(F/E)$$

$$H(X) = -\sum_i p_i \log p_i \qquad H(X,Y) = -\sum_{i,j} p_{i,j} \log p_{i,j}$$

$$H(X/Y) = \sum_j H(X/Y = y_j) P(Y = y_j)$$

$$I(X,Y) = H(X) - H(X/Y) = H(Y) - H(Y/X)$$

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y/X) = H(Y) + H(X/Y)$$

$$H_L(U) = \frac{H(U_1,\cdots,U_L)}{L}$$

$$H_\infty(U) = \lim_{L\to+\infty} H(U_L/U_1,\cdots,U_{L-1}) = \lim_{L\to+\infty} H_L(U)$$

Inégalité de Kraft $\sum_c b^{-n(c)} \leq 1$

Codage de source $\frac{H_L(U)}{\log b} \leq E(L) < \frac{H_L(U)}{\log b} + 1$

Capacité $C = \max_{\text{lois de } X} I(X,Y)$

Matrice génératrice $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix}$ (ou $\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{P} \end{bmatrix}$)

Matrice de contrôle $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$ (ou $\begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$).