Année 2008-2009
Solution du Contrôle Final – 1ère Session
Module MAT3502

Mounim A. El Yacoubi

Exercice 1 **(6 points)**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

i) Valeurs propres de **A**

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 2 & -4 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

Les valeurs propres de **A** sont donc 1, 2 et 3.

.

ii) Vecteurs propres de **A**.

On résout le système d'équations induit par $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\, \mathbf{u}_i = 0$, $\mathbf{u}_i$ étant le vecteur propre associé à la valeur propre de λ_i.

- Vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow y = 0, 2x = -z$$

➔ L'espace propre associé à $\lambda = 1$ est $\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

- Vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow y = 0, x = 0, z = cst$$

➔ L'espace propre associé à $\lambda = 2$ est $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

- Vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow y = x, z = -2x$$

➔ L'espace propre associé à $\lambda = 3$ est $\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

iii) Diagonalisation de la matrice **A**.

Dans la base $\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$, la matrice A s'écrit : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Autrement dit :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 **(14 points)**

i) a) La transformation permettant de passer des données brutes r_{ij} aux éléments x_{ij} de **X** s'écrit :

$$x_{ij} = \frac{r_{ij} - \bar{r}_j}{\sqrt{n}\sigma_j}, \quad i = 1,2,\ldots, p, n = 25, p = 8$$

b) Coordonnées de la ligne de **fr** (France) dans la matrice X.

fr 0.0347 0.0731 0.2684 0.1566 0.0438 0.1049 0.2961 0.1276

ii) a) L'analyse en composantes principales relative à la matrice de corrélation $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ s'effectue dans l'espace **des individus** (chaque individu étant représenté par 8 variables).

b) Il s'agit d'une *ACP* **Normée**.

iii) Les cinq premières valeurs propres de la matrice de corrélation sont données dans le tableau suivant :

Valeurs propres:

i	λ_i
1	5.311
2	1.016
3	0.745
4	0.448
5	0.266

a) Le taux d'inertie « expliqué » par les cinq premiers axes factoriels (composantes principales) est :

$$\tau_{1-5} = \frac{\sum_{\alpha=1}^{5} \lambda_\alpha}{\sum_{\alpha=1}^{8} \lambda_\alpha} = 97.33\% \qquad \text{(en utilisant } \sum_{\alpha=1}^{8} \lambda_\alpha = trace(\mathbf{X}^T\mathbf{X}) = 8\text{)}$$

b) La représentation est de très bonne qualité puisque les 5 premiers axes factoriels représentent 97.33% de l'inertie totale.

iv) Les 2 premiers axes factoriels (Vecteurs Propres) sont les suivants :

$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{u}_2$
-0.307	0.166
0.270	-0.584
-0.315	-0.449
-0.415	-0.090
-0.340	0.411
-0.411	0.183
-0.364	-0.357
-0.379	-0.303

a) Contribution de chacun de ces 2 premiers axes factoriels à l'inertie de l'élément **fr** (France).

$$Cr_\alpha(i) = \frac{\psi_{\alpha_i}^2}{\|\mathbf{e}_i\|^2} = \left(\frac{\mathbf{e}_i^T \mathbf{u}_\alpha}{\|\mathbf{e}_i\|}\right)^2 \qquad \|\mathbf{e}_i\|^2 = \sum_{j=1}^{8} e_{ij}^2 = \mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_i$$

fr correspond à $i = 10$

$\|\mathbf{e}_{10}\|^2 = 0.22$

$\mathbf{e}_{10}.\mathbf{u}_1 = -0.3546$ $\mathbf{e}_{10}.\mathbf{u}_2 = -0.2787$

$Cr_1(10)$	$Cr_2(10)$
0.5716	0.3531

b) Qualité de représentation Q de **fr** par l'espace des 2 premiers axes factoriels et interpréter.

$$Q = \sum_{\alpha=1}^{2} Cr_\alpha(10) = 0.9247 = 92.47\%$$

Donc, les 2 premiers axes factoriels rendent compte de prés de 92.5% de l'inertie de **fr**, ce qui constitue une très bonne qualité de représentation.

v) a) L'importance de l'élément **fr** (France) pour chacun des 2 premiers axes factoriels est déterminée par la contribution absolue $Ca_\alpha(i)$

$$Ca_\alpha(i) = \frac{\psi_{\alpha i}^2}{\lambda_\alpha} = \frac{\left(\mathbf{e}_i^T \mathbf{u}_\alpha\right)^2}{\lambda_\alpha}$$

fr correspond à $i = 10$

$Ca_1(10)$	$Ca_2(10)$
0.0237	0.0765

b) L'élément **fr** (France) a une incidence faible sur les 2 premiers axes factoriels. Cela résulte du fait que ses coordonnées ne s'écartent pas significativement de leurs moyennes respectives : **fr** n'est pas un élément atypique.

vi) a) Coefficients de corrélation linéaire $\rho_{j\alpha}$ entre l'axe factoriel $\mathbf{u}_\alpha$ et les 8 variables.

$$\rho_{j\alpha} = \frac{\mathbf{x}_j^T \mathbf{v}_\alpha}{\|\mathbf{x_j}\|} = \mathbf{x}_j^T \mathbf{v}_\alpha = \sqrt{\lambda_\alpha} u_{\alpha j} \qquad (\|\mathbf{x_j}\| = 1)$$

Donc, pour le 1er axe factoriel $\mathbf{u}_1$,

D'où : $$\rho_{j1} = \sqrt{\lambda_1} u_{1j}$$

ρ_{11}	ρ_{21}	ρ_{31}	ρ_{41}	ρ_{51}	ρ_{61}	ρ_{71}	ρ_{81}
-0.7075	0.6222	-0.7259	-0.9564	-0.7836	-0.9472	-0.8389	-0.8734

b) Le 1er axe factoriel correspond, grossièrement au vecteur moyen des variables, et oppose le taux de chômage aux autres variables.