Institut National des Télécommunications - Télécom INT
EI1, Module AN 12
Coordonateur : Annabelle Joannic-Chardin

Analyse Numérique

Examen 1, 2005/06
24 avril 2006
Durée : 1 heure 30
Documents autorisés

N. B. Les exercices sont indépendants

Exercice 1

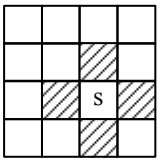
On considère trois types de populations α, β, et γ de poissons. L'angle de vision des poissons tirés au hasard dans ces populations suivent les lois de probabilité données respectivement par les densités sur $[0,\pi]$ suivantes : $f_\alpha(x)=\frac{1}{\pi}$, $f_\beta(x)=\frac{2x}{\pi^2}$ et $f_\gamma(x)=c\left(\sin(x)+\frac{1}{\pi}\right)$ (avec $c>0$ constante normalisatrice).

1. Proposer des méthodes de simulation de l'angle de vision pour chacune des populations ;
2. On considère un mélange des trois populations ci-dessus, avec des proportions Π_α, Π_β et Π_γ. Quelle est la loi de probabilité f de l'angle de vision d'un poisson tiré au hasard dans ce mélange ? Proposer une méthode de simulation de f.

Exercice 2

Remarque : les 2 parties peuvent être traitées indépendamment.

1. On cherche à simuler une image en noir et blanc de taille $m\times m$. On modélise l'image par $X=(X_s)_{s\in S}$ où S est l'ensemble des pixels, *i.e.* le carré de $m\times m$ éléments, et chaque X_s la variable aléatoire à valeurs dans $\Omega=\{0,1\}$ correspondant au pixel numéro s.
   a) En remarquant que X est un vecteur aléatoire discret, suggérer une méthode de simulation directe de X (commencer par expliciter l'espace d'états de X ainsi que sa loi de probabilité). Pourquoi une telle méthode n'est pas efficace ?
   b) Un cas particulier est de considérer que tous les pixels sont indépendants. Que devient la loi de X et comment sa procédure de simulation est-elle simplifiée ?
   c) On suppose maintenant que la loi de X est donnée par $P(X=x)=c\exp\left(-\sum_{s,t\ voisins}\varphi_{st}(x_s,x_t)\right)$, avec $c>0$ constante normalisatrice. Les pixels voisins sont définis ci-contre : les pixels hachurés sont les voisins du pixel numéro s. Montrer que la loi de X_s conditionnelle à toutes les autres variables restantes est égale à sa loi conditionnelle aux variables de tous voisins de s : $P(X_s=x_s|X_t=x_t\ \forall\, t\neq s)=P(X_s=x_s|X_t=x_t\ \forall\, t\ voisins\ de\ s)$.



En déduire une application de l'échantillonneur de Gibbs.

2. On se place à présent dans le cadre de la classification statistique d'images. X devient inobservable, mais on observe un autre vecteur aléatoire $Y=(Y_s)_{s\in S}$ à valeurs dans R^n et dont la loi conditionnelle à X est donnée par $f_{Y|X=x}(y)=\prod_{s\in S} f_{Y_s|X_s=x_s}(y_s)$.

   a) On suppose que les densités $f_{Y_s|X_s=0}(y_s)$ et $f_{Y_s|X_s=1}(y_s)$ ne dépendent pas de s et sont gaussiennes. Décrire brièvement une méthode de simulation de Y.

   b) On dispose d'une image de la marée noire suite au naufrage de l'Erika sur les côtes bretonnes, composée d'eau et de pétrole. On souhaite connaître l'étendue de la nappe de pétrole et pour cela il faut classer les pixels dans la classe « eau » $(x_s=0)$ ou dans la classe « pétrole » $(x_s=1)$. On cherche à tester plusieurs méthodes de classification. Expliquer en quelques phrases, sans calcul, comment utiliser la possibilité de simuler X et Y pour choisir la meilleure méthode.

Exercice 3

Soient Ω le rectangle dans R^2 de la Figure 1, Γ sa frontière, et f une fonction définie sur Ω de carré intégrable. On recherche la solution u de l'équation différentielle aux dérivées partielles : $-(\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2})=f(x,y)$ dans Ω et $u(x,y)=0$ sur Γ.

On se propose d'approcher la solution par la méthode des éléments finis. On s'intéresse à la triangulation représentée sur la Figure 1, c'est-à-dire un découpage de Ω en 6 carrés élémentaires.

On considère le carré $K=[0,1]^2$ représenté sur la Figure 2, et $\Sigma=\{a_i\}_{i=0\cdots 8}$ composé des sommets, des milieux des côtés et du milieu du carré K. Par ailleurs, on considère Q l'ensemble des polynômes sur R^2 de degré inférieur ou égal à deux par rapport à chacune des variables : $p(x,y)=\sum_{0\leqslant i,j\leqslant 2}\alpha_{ij}x^i y^j$.

1. Montrer que (K,Σ,Q) est un élément fini de Lagrange. Exhiber les fonctions de base associées à $a_0=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $a_1=(0,0)$ et $a_3=(1,1)$.
2. Donner la dimension du système linéaire à résoudre en utilisant la triangulation et l'élément fini proposés.
3. Numéroter les carrés affines-équivalents de la triangulation et caractériser les fonctions φ associées aux points $(1,1)$ et $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$: préciser leurs supports et expliciter leurs formes polynomiales.
4. Numéroter les fonctions de bases et préciser parmi les éléments de la matrice A correspondante ceux qui sont nuls et ceux qui sont non nuls.

Figure 1

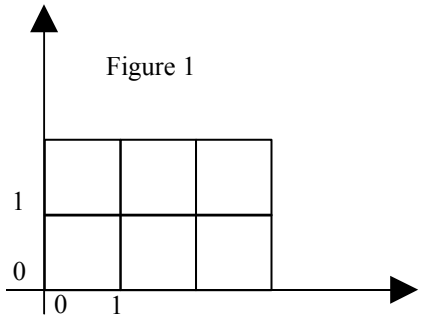
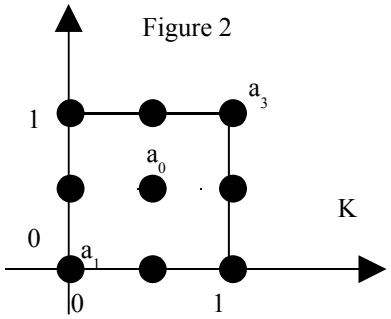


Figure 2



Corrigé succinct du sujet d'AN12

Exercice 1

1. f_α (loi uniforme sur $[0,\pi]$) : simulée par méthode de fonction de répartition inverse ($F_\alpha^{-1}(u)=\Pi u$)
f_β : 2 possibilités, soit méthode de fonction de répartition inverse ($F_\beta^{-1}(u)=\Pi\sqrt{u}$), soit méthode acceptation-rejet ($g=f_\alpha$ et M=2)

f_γ (c=1/3) : méthode acceptation-rejet ($g=f_\alpha$ et $M=\frac{\Pi+1}{3}$)

2. $f(x)=\Pi_\alpha f_\alpha(x)+\Pi_\beta f_\beta(x)+\Pi_\gamma f_\gamma(x)$

Soit Y v.a. à valeurs dans $\{\alpha,\beta,\gamma\}$ désignant le type, et X v.a. à valeurs dans $[0,\pi]$ désignant l'angle de vision.

Méthode des lois marginales pour simuler f : on tire y dans $\{\alpha,\beta,\gamma\}$ selon $\Pi=(\Pi_\alpha,\Pi_\beta,\Pi_\gamma)$ (méthode de fonction de répartition inverse pour variable discrète) , ensuite x dans $[0,\pi]$ selon f_y

Exercice 2

1.a. $\Omega(X)$: ensemble de toutes les configurations possibles de pixels noirs et blancs sur carré S numérotées de 1 à $m\times m$

$Card\,\Omega(X)=2^{m\times m}$

Soit p_i la probabilité de la configuration numéro i

Simulation directe de X par la méthode de fonction de répartition inverse pour variable discrète : pas efficace car $\Omega(X)$ trop riche

1.b. On a $X=(X_s)_{s\in S}$. Soit $x=(x_s)_{s\in S}$ une réalisation possible

si les X_s sont indépendants alors $P(X=x)=\prod_{s\in S}P(X_s=x_s)$

Simulation : simuler chaque X_s indépendamment des autres, soit simuler $m\times m$ v.a. de Bernouilli (méthode de fonction de répartition inverse pour variable discrète : tirer u selon loi uniforme sur $[0,1]$, si $u<P(X_s=0)$ alors on pose $x_s=0$ et $x_s=1$ sinon)

1.c. cf. polycopié page 33

Echantillonneur de Gibbs simplifié par rapport au polycopié page 35 : les distributions conditionnelles à toutes les autres composantes sont remplacées par les distributions conditionnelles au voisinage

2.a. Méthode des lois marginales : on simule X à l'aide d'une des méthodes de la partie 1 de l'exercice, puis chaque Y_s étant indépendants conditionnellement à X , on simule chaque Y_s avec $f_{Y_s|X_s=0}$ si $x_s=0$ ou $f_{Y_s|X_s=1}$ sinon.

Les densités $f_{Y_s|X_s=0}(y_s)$ et $f_{Y_s|X_s=1}(y_s)$ sont simulées avec technique décrite en page 28 du poly

2.b. En simulant un grand nombre de couples (X,Y) et en testant chaque méthode sur tous ces couples, on peut calculer un taux de classification pour chaque méthode (loi des gds nbres) et construire ainsi un élément de comparaison : la meilleure technique aura le meilleur taux.

Exercice 3

Attention ici les éléments finis ne sont plus des triangles, mais des carrés !

$a_0=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $a_1=(0,0)$, $a_2=(1,0)$, $a_3=(1,1)$, $a_4=(0,1)$, $a_5=(\frac{1}{2},0)$, $a_6=(1,\frac{1}{2})$,
$a_7=(\frac{1}{2},1)$, $a_8=(0,\frac{1}{2})$

1. Montrer que Σ est Q-unisolvant. Soit le 9-uplet $\beta=(\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5,\beta_6,\beta_7,\beta_8)$, montrer qu'il existe un unique $p\in Q$ (soit $p(x,y)=\alpha_{00}+\alpha_{10}x+\alpha_{01}y+\alpha_{11}xy+\alpha_{20}x^2+\alpha_{02}y^2+\alpha_{12}xy^2+\alpha_{21}x^2y+\alpha_{22}x^2y^2$) tel que $p(a_i)=\beta_i$ pour $0\leqslant i\leqslant 8$

Il y a différentes manières de démontrer que le système a une solution unique. Si on le résout, on obtient :

$\alpha_{00}=\beta_1$, $\alpha_{01}=-3\beta_1-\beta_2+4\beta_5$, $\alpha_{02}=2\beta_1+2\beta_2-4\beta_5$, $\alpha_{10}=-3\beta_1-\beta_4+4\beta_8$,
$\alpha_{20}=2\beta_1+2\beta_4-4\beta_8$, $\alpha_{11}=16\beta_0+9\beta_1+3\beta_2+\beta_3+3\beta_4-12\beta_5-4\beta_6-4\beta_7-12\beta_8$,

$\alpha_{12}=-16\beta_0-6\beta_1-6\beta_2-2\beta_3-2\beta_4+12\beta_5+8\beta_6+4\beta_7+8\beta_8$,
$\alpha_{21}=-16\beta_0-6\beta_1-2\beta_2-2\beta_3-6\beta_4+8\beta_5+4\beta_6+8\beta_7+12\beta_8$,
$\alpha_{22}=16\beta_0+4\beta_1+4\beta_2+4\beta_3+4\beta_4-8\beta_5-8\beta_6-8\beta_7-8\beta_8$.

Les fonctions de bases s'obtiennent pour les 9-uplets particuliers suivants $\beta^0=(1,0,0,0,0,0,0,0,0)$, $\beta^1=(0,1,0,0,0,0,0,0,0)$ et $\beta^3=(0,0,0,1,0,0,0,0,0)$; soit par exemple $p_0(x,y)=16xy(x-1)(y-1)$ (on vérifie que le polynôme s'annule bien en tous les autres points autres que a_0)

2. Comme en TD, il suffit de compter les points intérieurs (sommets des carrés : 2, milieux des carrés : 6 et milieux des côtés : 7). La dimension du système est 15.

3. On numérote les fonctions φ (de 1 à 15) de gauche à droite et de bas en haut. Au plus grossier, on peut dire que le support de la fonction φ associée aux point a_3 (soit φ_7) sont les carrés K1, K2, K4 et K5 et celui de la fonction φ associée aux point a_0 (soit φ_1) est le carré K1. φ_1 sera exactement la fonction de base p_0 associée au carré K1 calculée dans la question précédente. La restriction de φ_7 à K1 sera exactement la fonction de base p_3 associée au carré K1 calculée dans la question précédente. La restriction de φ_7 à K5 sera la fonction de base p_1 associée au carré K5 (calculée sur K1, reste à translater sur K5). La restriction de φ_7 à K2 sera la fonction de base p_4 associée au carré K2 (qui reste à calculer). La restriction de φ_7 à K4 sera la fonction de base p_2 associée au carré K4 (qui reste à calculer).

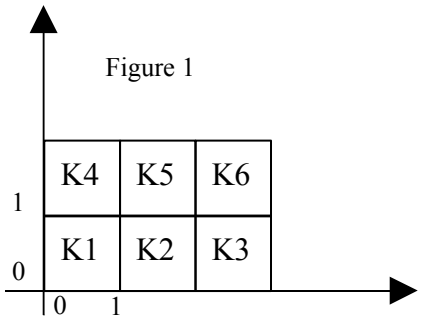


Figure 1

4. On rappelle que A est composée des éléments $a_{ij}=\int_D\left(\frac{\partial\varphi_i(x,y)}{\partial x}\frac{\partial\varphi_j(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_i(x,y)}{\partial y}\frac{\partial\varphi_j(x,y)}{\partial y}\right)dxdy$.

On voit de suite que a_{ij} sera nul si les supports de φ_i et φ_j ont une intersection vide. D'où la matrice A symétrique

$$\begin{bmatrix}
x & x & 0 & 0 & 0 & x & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
x & x & x & x & 0 & x & x & x & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & x & x & x & 0 & 0 & x & x & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & x & x & x & x & 0 & x & x & x & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & x & x & 0 & 0 & 0 & x & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
x & x & 0 & 0 & 0 & x & x & 0 & 0 & 0 & x & x & 0 & 0 & 0\\
x & x & x & x & 0 & x & x & x & x & 0 & x & x & x & x & 0\\
0 & x & x & x & 0 & 0 & x & x & x & 0 & 0 & x & x & x & 0\\
0 & x & x & x & x & 0 & x & x & x & x & 0 & x & x & x & x\\
0 & 0 & 0 & x & x & 0 & 0 & 0 & x & x & 0 & 0 & 0 & x & x\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & x & 0 & 0 & 0 & x & x & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & x & x & x & 0 & x & x & x & x & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & x & x & 0 & 0 & x & x & x & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & x & x & x & 0 & x & x & x & x\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & x & 0 & 0 & 0 & x & x
\end{bmatrix}$$

Institut National des Télécommunications
Télécom INT, EI1, Module AN12, année scolaire 2006/07
Coordonnateur : Annabelle Joannic-Chardin

Analyse Numérique

Examen du 26 mars 2007
Durée : 1 heure 30
Seule une feuille manuscrite A4 recto-verso est autorisée

N.B. Les exercices sont indépendants.

Exercise 1

On cherche à résoudre un problème de Neumann par la méthode des éléments finis.
On définit le problème de Neumann par la donnée d'un ouvert Ω borné de $\mathbb{R}^2$ de frontière Γ $\mathcal{C}^1$ par morceaux et on considère le problème suivant : étant donné une fonction f de $L^2(\Omega)$, trouver une fonction u définie sur Ω et solution de

$$\begin{cases} -\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + u = f \text{ dans } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial v} = 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

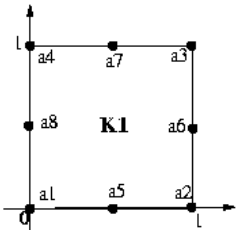
1. Montrer que la formulation variationnelle de ce problème consiste à trouver u tel que pour tout v suffisament régulière, $a(u,v) = L(v)$ avec

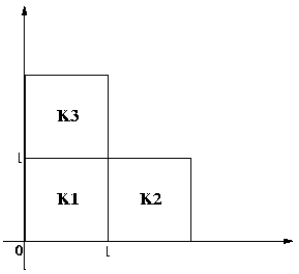
$$a(u,v) = \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy + \int_\Omega uv\,dx\,dy \quad \text{et} \quad L(v) = \int_\Omega fv\,dx\,dy$$

   On rappelle la formule de de Stockes :

$$-\int_\Omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) v\,dx\,dy = \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial v} v\,d\sigma$$

2. On considère le carré $K_1 = [0,1]^2$ ci-dessous et $\Sigma = \{a_i\}_{i=1\ldots8}$ l'ensemble des sommets et des milieux des côtés de K. On appelle P l'ensemble des polynômes p de la forme $p(x) = c_0 + c_1x + c_2y + c_3x^2 + c_4y^2 + c_5xy + c_6x^2y + c_7xy^2$.
   Montrer que (K, Σ, P) est un élément fini de Lagrange. Exhiber les fonctions de base associées aux points a_1 et a_8.





3. On s'intéresse à un domaine Ω constitué de l'union des trois carrés K_1, K_2 et K_3 de la figure ci-dessus. Ces derniers forment donc une triangulation de Ω.
   La méthode des éléments finis consiste à construire un ensemble de fonctions de dimension finie, dans lequel on recherche la solution au problème, ainsi qu'une base $(\varphi_1, \ldots, \varphi_N)$ de cet ensemble. Quelle est la dimension N de cet ensemble ? (Attention ! ici $u \neq 0$ sur Γ.)

4. A l'aide de la base, montrer que la formulation variationnelle $a(u, v) = L(v)$ revient à résoudre un système d'équations de type $Au = b$. Représenter la matrice A en mettant une croix lorsque l'élément est non nul et 0 sinon.
5. Proposer, sans les décrire, des méthodes numériques de résolution du système.
6. On souhaite plus de précision sur K_2 et on le découpe en quatre triangles identiques selon les diagonales du carré. Est-il possible d'envisager une triangulation faisant intervenir simultanément des carrés et des triangles ? Si oui, quelle est la dimension du nouvel ensemble de solutions ?

Exercise 2

Considérons le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} 10^{-17}x & + & y & = & 1 \\ x & + & y & = & 2 \end{array} \right.$$

1. Donner une solution approchée intuitive.
2. Résoudre le système à l'aide de la méthode de Gauss et proposer les lignes de code Scilab mettant en œuvre cette résolution.
3. Si l'on exécutait les commandes ci-dessus, on constaterait que Scilab renvoie le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Par contre, en permutant les deux équations, Scilab donne la bonne solution. Comment peut-on expliquer ce phénomène ?

Exercise 3

On cherche à simuler une réalisation d'une variable aléatoire de densité $f(x) = C \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \mathbb{1}_{x \geq \theta}$, avec μ, σ et θ fixés et C une constante de normalisation.

1. Comment peut-on générer des échantillons d'une loi gaussienne $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.
2. Proposer une méthode de simulation de f à partir d'une loi gaussienne.
3. On prend maintenant $\mu = 0$ et $\sigma = 1$. Considérons la densité d'une loi exponentielle translatée $g_\alpha(x) = \alpha \exp(-\alpha(x - \theta))\mathbb{1}_{x \geq \theta}$.
   Montrer que l'on peut appliquer une méthode d'acceptation-rejet avec g_α pour simuler f et déterminer le choix optimal de α pour minimiser la probabilité de rejet. (Pour cela, on cherchera une borne supérieure pour f/g_α en dissociant les cas $\alpha \geq \theta$ et $\alpha \leq \theta$).

Corrigé plus ou moins succinct du sujet d'AN12 du 26 mars 2007

Exercise 1

1. On obtient la forme variationnelle en multipliant l'équation par v et en intégrant sur Ω :

$$-\int_\Omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) v\,dx\,dy+\int_\Omega uv\,dx\,dy=\int_\Omega fv\,dx\,dy$$

En utilisant la formule de Stockes :

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy-\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial v}v\,d\sigma+\int_\Omega uv\,dx\,dy=\int_\Omega fv\,dx\,dy$$

Les conditions sur Γ donnent $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial v}v\,d\sigma=0$, d'où l'équation :

$$\underbrace{\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy+\int_\Omega uv\,dx\,dy}_{=a(u,v)}=\underbrace{\int_\Omega fv\,dx\,dy}_{=L(v)}$$

2. Deux solutions sont possibles : soit on résout 3 systèmes 8×8 très simples (second membre nul ou presque), soit on traite un seul système 8×8 un peu complexe. Pour aller plus vite, on remarquera que l'on peut découper la résolution en 4 sous-sytèmes : un de taille 1×1 (1), 2 similaires de taille 2×2 ((2)+(5) et (3)+(8)) et un dernier de taille 3×3 ((4)+(6)+(7)).

$$\begin{aligned}
p(a_1)=p(0,0) &= c_0 && (1)\\
p(a_2)=p(1,0) &= c_0+c_1+c_3 && (2)\\
p(a_3)=p(1,1) &= c_0+c_1+c_2+c_3+c_4+c_5+c_6+c_7 && (3)\\
p(a_4)=p(0,1) &= c_0+c_2+c_4 && (4)\\
p(a_5)=p(\frac{1}{2},0) &= c_0+\frac{c_1}{2}+\frac{c_3}{4} && (5)\\
p(a_6)=p(1,\frac{1}{2}) &= c_0+c_1+\frac{c_2}{2}+c_3+\frac{c_4}{4}+\frac{c_5}{2}+\frac{c_6}{2}+\frac{c_7}{4} && (6)\\
p(a_7)=p(\frac{1}{2},1) &= c_0+\frac{c_1}{2}+c_2+\frac{c_3}{4}+c_4+\frac{c_5}{2}+\frac{c_6}{4}+\frac{c_7}{2} && (7)\\
p(a_8)=p(0,\frac{1}{2}) &= c_0+\frac{c_2}{2}+\frac{c_4}{4} && (8)
\end{aligned}$$

– La moins sujette à erreur : on voit immédiatement que $\dim(P)=\mathrm{Card}(\Sigma)$; il reste à montrer que le seul polynôme qui s'annule sur Σ est le polynôme identiquement nul, c'est-à-dire

$$\forall i=1\dots 8, p(a_i)=0 \iff \forall j=0\dots 7, c_j=0$$

Ceci démontre que (K,Σ,P) est un élément fini de Lagrange.
Pour trouver p_1, il faut résoudre le système $p(a_1)=1$ et $\forall i=2\dots 8, p(a_i)=0$.
Pour trouver p_8, il faut résoudre le système $p(a_8)=1$ et $\forall i=1\dots 7, p(a_i)=0$.

– La plus complète : on se donne un 8-uplet $(\alpha_1,\dots,\alpha_8)$ et on résout le système $p(a_i)=\alpha_i$

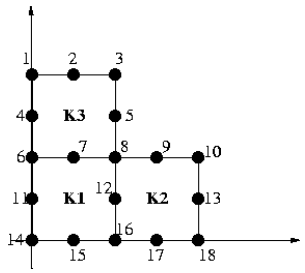
pour $i = 1 \dots 8$. On obtient

$$\begin{cases} c_0 = \alpha_1 \\ c_1 = -3\alpha_1 - \alpha_2 + 4\alpha_5 \\ c_2 = -3\alpha_1 - \alpha_4 + 4\alpha_8 \\ c_3 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\alpha_5 \\ c_4 = 2\alpha_1 + 2\alpha_4 - 4\alpha_8 \\ c_5 = 5\alpha_1 - \alpha_2 - 3\alpha_3 - \alpha_4 - 4\alpha_5 + 4\alpha_6 + 4\alpha_7 - 4\alpha_8 \\ c_6 = -2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + 4\alpha_5 - 4\alpha_7 \\ c_7 = -2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 - 2\alpha_4 - 4\alpha_6 + 4\alpha_8 \end{cases}$$

Ceci démontre que (K, Σ, P) est un élément fini de Lagrange. Pour obtenir p_1, il suffit de remplacer α_1 par 1 et les autres α_i par 0. De même pour p_8, on prend $\alpha_8 = 1$ et tous les autres nuls.

Finalement on a $p_1(x, y) = 1 - 3(x + y) + 2(x^2 + y^2) + 5xy - 2(x^2y + xy^2) = 2(1 - x)(1 - y)(\frac{1}{2} - x - y)$ et $p_8(x, y) = 4y - 4y^2 - 4xy + 4xy^2 = 4y(1 - x)(1 - y)$

3. Comme $u \neq 0$ sur Γ, on doit considérer tous les points de la triangulation, y compris ceux de la frontière, soit 18.
4. Pour la démonstration, voir la page 39 du polycopié : $A = (a(\varphi_i, \varphi_j))_{1 \leq i,j \leq 18}$.



En prenant la numérotation ci-dessus et sachant que A est symétrique, on peut se contenter de donner le triangle inférieur de A :

$$A = \begin{bmatrix}
x & & & & & & & & & & & & & & & & \\
x & x & & & & & & & & & & & & & & & \\
x & x & x & & & & & & & & & & & & & & \\
x & x & x & x & & & & & & & & & & & & & \\
x & x & x & x & x & & & & & & & & & & & & \\
x & x & x & x & x & x & & & & & & & & & & & \\
x & x & x & x & x & x & x & & & & & & & & & & \\
x & x & x & x & x & x & x & x & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & x & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & x & x & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & x & x & 0 & 0 & x & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & x & x & x & x & x & x & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & x & x & 0 & x & x & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & x & x & 0 & 0 & x & x & 0 & x & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & x & x & 0 & 0 & x & x & 0 & x & x & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & x & x & x & x & x & x & x & x & x & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & x & x & 0 & x & x & 0 & 0 & x & x & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & x & x & 0 & x & x & 0 & 0 & x & x & x
\end{bmatrix}$$

5. Voir 1er chapitre du polycopié
6. Pour que cela soit possible, il faut au moins que les points des éléments finis de chaque géométrie correspondent. Il faudra donc choisir les triangles de type (2) du cours. Il faudra aussi s'assurer que les fonctions de base coincident sur les frontières communes à des éléments

finis de géométrie différente. Dans l'hypothèse où ces conditions étaient remplies, la dimension serait de 18+5=23.

Exercise 2

1. Solution approchée intuitive : $(x, y) = (1, 1)$.
2. Résolution par la méthode de Gauss

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 10^{-17}x & + & y & = & 1 \\ x & + & y & = & 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcl} 10^{-17}x & + & y & = & 1 \\ & & (1-\frac{1}{10^{-17}})y & = & 2-\frac{1}{10^{-17}} \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x = \frac{1-y}{10^{-17}} \\ y = \frac{2.10^{-17}-1}{10^{-17}-1} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x = \frac{1}{1-10^{-17}} & \sim & 1 \\ y = \frac{2.10^{-17}-1}{10^{-17}-1} & \sim & 1 \end{array}\right.$$

Code Scilab correspondant :

```
--> A=[1e-17 1 ;1 1] ;b=[1 2]' ;
--> b(2) = b(2) - b(1)*A(2,1)/A(1,1) ;
--> A(2, :) = A(2, :) - A(1, :)*A(2,1)/A(1,1) ;
--> y = b(2)/A(2,2) ;
--> x = (b(1)-A(1,2)*y)/A(1,1)
```

3. Contrairement au calcul littéral qui conserve toute la précision numérique pour obtenir x, l'algorithme calcule la valeur de y avant de l'utiliser dans la formule $x = \frac{1-y}{10^{-17}}$. Or comme $10^{-17} << 1$, Scilab approxime y par 1 (c'est une erreur d'arrondi) et par suite x est donc égal à 0.
   En inversant les deux équations, la formule de calcul de x devient $x = 2 - y$ et on obtient alors la bonne solution puisque x sera approximé par 1.

Exercise 3

Remarque : f est une densité si $C = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}(1-F(\theta))}$, avec F la fonction de répartition de $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$; θ, μ et σ étant connus, $F(\theta)$ est calculable et par suite C aussi.

1. Voir chapitre 2, paragraphe 2.2 du polycopié.
2. f est une gaussienne tronquée : on n'accepte que les réalisations supérieures à θ. On peut alors utiliser une méthode d'acceptation-rejet avec g la gaussienne $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ (densité simulable, cf question précédente) et $M = \frac{1}{1-F(\theta)}$.
3. Pour montrer que l'on peut appliquer une méthode d'acceptation-rejet avec g_α pour simuler f, il faut montrer que g_α est bien une densité simulable, puis trouver un majorant du rapport f/g_α.
   - g_α est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g_\alpha(x)\,dx = 1$: donc g_α est bien une densité.
   - Montrons que l'on peut simuler g_α par la méthode de la fonction de répartition inverse.

$$G_\alpha(x) = \int_{-\infty}^{x} g_\alpha(t)\,dt = \int_{\theta}^{x} \alpha\exp(-\alpha(t-\theta))\,dt = (1-\exp(-\alpha(x-\theta))) \quad \text{si } x \geq \theta$$

   Recherchons l'inverse de G_α : soit $u \in [0,1]$, on a $G_\alpha(x) = u \iff x = \theta - \frac{1}{\alpha}\log(1-u)$. Ceci est cohérent avec $x \geq \theta$ car $\log(1-u) \leq 0$. Pour tirer un échantillon selon g_α, il suffit donc de tirer une réalisation u uniforme sur $[0,1]$ et d'appliquer la formule ci-dessus.
   - Calculons le rapport f/g_α sur l'intervalle $[\theta, +\infty[$.

$$\frac{f(x)}{g_\alpha(x)} = \frac{C}{\alpha}\exp(-\frac{x^2}{2} + \alpha x - \alpha\theta) = \frac{C}{\alpha}e^{h(x)} \quad \text{avec } h(x) = -\frac{x^2}{2} + \alpha x - \alpha\theta$$

   Pour trouver M tel que $f \leq Mg_\alpha$, il faut trouver le maximum de h (car exp est croissante). On a $h'(x) = \alpha - x$. Les variations de h dépendent de la position de α par rapport à θ.

– Si $\alpha \leq \theta$, alors $h'(x) \leq 0$ et h est décroissante sur $[\theta, +\infty[$, donc son maximum est $h(\theta) = -\frac{\theta^2}{2}$. On aura alors $M = \frac{C}{\alpha} e^{-\frac{\theta^2}{2}}$.
– Si $\alpha \geq \theta$, alors on a le tableau de variation suivant :

x	θ		α	
h'		+	⋮	-
h		↗	⋮	↘

Le maximum de h est donc $h(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2} - \alpha\theta$. On aura alors $M = \frac{C}{\alpha} e^{\frac{\alpha^2}{2} - \alpha\theta}$.

On sait que la probabilité d'acceptation de la méthode est $\frac{1}{M}$. Pour déterminer le choix optimal de α, il faut donc trouver le minimum de la fonction suivante :

$$M(\alpha) = \begin{cases} \frac{C}{\alpha} e^{-\frac{\theta^2}{2}} & \text{si } \alpha \leq \theta \\ \frac{C}{\alpha} e^{\frac{\alpha^2}{2} - \alpha\theta} & \text{si } \alpha \geq \theta \end{cases}$$

Le tableau de variation de $M(\alpha)$ donne :

α		θ		$\frac{1}{2}(\theta + \sqrt{4+\theta^2})$		
M'	-	⋮	-	⋮		+
M	↘	⋮	↘	⋮		↗

Finalement la probabilité de rejet sera minimale lorsque M sera minimum, soit pour $\alpha = \frac{1}{2}(\theta + \sqrt{4+\theta^2})$.

Institut National des Télécommunications
Télécom INT, EI1, Module AN12, année scolaire 2006/07
Coordonnateur : Annabelle Joannic-Chardin

Analyse Numérique

Examen du 14 mai 2007
Durée : 1 heure 30
Seule une feuille manuscrite A4 recto-verso est autorisée

N.B. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1

On s'intéresse à la résolution numérique d'un système linéaire de la forme $Ax = b$ et de taille N. On note $\tilde{v}$ la solution numérique approchée et on calcule le conditionnement par rapport à l'inversion et le résidu $R = \max_{i=1,\dots,N} |(A\tilde{v})_i - b_i|$.

1. Rappeler brièvement la définition du conditionnement d'une matrice par rapport à l'inversion.
2. On connaît par ailleurs la solution vraie v. On peut alors calculer l'erreur absolue $E = \max_{i=1,\dots,N} |v_i - \tilde{v}_i|$ et on obtient le tableau ci-dessous.

N	cond	R	E
4	$1,5.10^{4}$	2.10^{-16}	3.10^{-13}
8	$1,5.10^{10}$	9.10^{-16}	4.10^{-7}
10	$1,6.10^{13}$	0	0,001
12	$1,7.10^{16}$	2.10^{-15}	0,3
14	5.10^{17}	1.10^{-15}	42,7

   Que peut-on en déduire sur le système ?
   Le résidu est-il une quantité pertinente pour évaluer la qualité du résultat ? Pourquoi ?
3. Ecrire les commandes Scilab permettant d'obtenir les valeurs du tableau ci-dessus en supposant qu'il existe déjà par ailleurs la fonction `matriceA(N)` qui fabrique A en fonction de N, de même `vecteurb(N)` pour b et `vraie(N)` pour v.

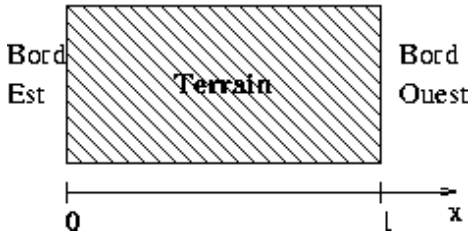
Exercice 2

Dans le cadre d'un challenge de robotique, vous devez construire un robot ramasseur de balle. Pour tester l'algorithme de détection de balles, il faut créer une vue du dessus du terrain de jeu avec n ronds répartis au hasard. Le terrain est un rectangle de taille 1 m par 50 cm.

1. Dans un premier temps, on simule la position des centres des balles et on supposera que les balles sont réparties de manière uniforme sur le terrain. Les variables aléatoires modélisant les abscisses X et les ordonnées Y sont-elles indépendantes ? Proposer une méthode de simulation du couple (X, Y).
2. Dans un deuxième temps, on veut prendre en compte l'épaisseur des balles de rayon $r = 2$ cm. Comment faire à partir de la simulation précédente ? Peut-on réaliser une simulation prenant directement en compte cette contrainte ?
3. Sur le terrain, il y a en fait des balles de deux couleurs : orange et vert. Pour gagner, votre robot ne doit ramasser que les balles vertes. On sait que

– les balles oranges sont deux fois plus nombreuses que les vertes ;
– les balles oranges sont réparties uniformément sur le terrain ;
– les balles vertes sont plus concentrées aux bords Est et Ouest du terrain : si x représente la distance du centre d'une balle verte depuis le bord Est, alors la densité de probabilité des abscisses des balles vertes est de la forme $f(x) = 2(3x^2 - 3x + 1)$.

Comment simuler la configuration initiale du terrain ?



Exercice 3

On considère le prisme K de sommets $\Sigma = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$ avec $s_1 = (1, 0, 0)$, $s_2 = (0, 1, 0)$, $s_3 = (0, 0, 0)$, $s_4 = (1, 0, 1)$, $s_5 = (0, 1, 1)$ et $s_6 = (0, 0, 1)$. Soit Q l'ensemble des polynômes de trois variables de degré inférieur ou égal à 1 par rapport à chaque variable et P l'ensemble des polynômes de trois variables de la forme $p(x, y, z) = c_0 + c_1x + c_2y + c_3z + c_4xz + c_5yz$.

1. (K, Σ, Q) et (K, Σ, P) sont-ils des éléments fini de Lagrange ? Justifier.
2. Donner les fonctions de base de (K, Σ, P).
3. Soit $\hat{K}$ le prisme de sommets $\hat{\Sigma} = \{\hat{s}_1, \hat{s}_2, \hat{s}_3, \hat{s}_4, \hat{s}_5, \hat{s}_6\}$ avec $\hat{s}_1 = s_1$, $\hat{s}_2 = s_2$, $\hat{s}_3 = (1, 1, 0)$, $\hat{s}_4 = s_4$, $\hat{s}_5 = s_5$ et $\hat{s}_6 = (1, 1, 1)$. Donner la fonction affine de $\mathbb{R}^3$ qui transforme K en $\hat{K}$. En déduire que (K, Σ, P) et $(\hat{K}, \hat{\Sigma}, P)$ sont des éléments finis affine-équivalents.
4. Exhiber les fonctions de base de $(\hat{K}, \hat{\Sigma}, P)$ associées à $\hat{s}_3$ et $\hat{s}_5$.
5. On veut utiliser ces éléments finis pour obtenir une approximation du problème de Dirichlet dans $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} -\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + u = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma \text{ et en dehors de } \Omega \end{cases}$$

avec Ω un cube de côté 3 et Γ l'ensemble de ces faces.
En s'inspirant de la méthode du cours sur $\mathbb{R}^2$, proposer un espace de dimension finie dans lequel rechercher la solution approchée au problème de Dirichlet. Préciser sa dimension.

Corrigé très succinct du sujet d'AN12 du 14 mai 2007

Exercice 1

1. voir cours chapitre 1
2. Le conditionnement augmente avec N, donc la résolution du système risque de poser des problèmes numériques si l'on se trompe sur le second membre lorsque le système devient grand.
   Le résidu est intéressant car son calcul ne nécessite pas la connaissance de la solution vraie contrairement à l'erreur absolue. Mais il n'est pas une bonne indication car il reste toujours quasiment nul alors que l'erreur augmente.
3. Code Scilab

```
--> N=[4, 8 :2 :14] ;
--> for i=1 :length(N)
--> A=matriceA(N(i)) ; b=vecteurb(N(i)) ; v=vraie(N(i)) ;
--> C(i)=cond(A) ;
--> x=A\b ; R(i)=max(abs(A*x-b)) ; E(i)=max(abs(v-x)) ;
--> end
```

Exercice 2

1. La répartition étant uniforme sur tout le terrain T rectangle, X et Y sont indépendants car $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\text{Aire de } T}\mathbb{1}_{(x,y)\in T} = 2\mathbb{1}_{[0,1]\times[0,\frac{1}{2}]}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$. On peut alors les simuler séparément avec X suivant une loi uniforme sur $[0,1]$ que l'on sait simuler avec les ordinateurs et Y suivant une loi uniforme sur $[0,\frac{1}{2}]$ que l'on simule par la méthode de la fonction de répartition inverse.
2. On balaye tous les points et on élimine tous ceux qui sont à moins de 2 cm du bord ou d'un autre point.
   Simulation directe : à chaque tirage d'une nouvelle coordonnée de centre de balle, on ne la conserve que si le centre est à moins de 2 cm du bord ou d'un autre point déjà tiré.
3. méthode des lois marginales : on tire la couleur (loi discrète à deux valeurs, l'une de proba $\frac{1}{3}$ (pour le vert) et l'autre de $\frac{2}{3}$ (pour l'orange)), puis si la balle est orange, on tire X uniformément dans $[0,1]$ et Y uniformément dans $[0,\frac{1}{2}]$ (cf 1ère question) et si la balle est verte, on tire X selon sa loi en utilisant une méthode d'acceptation-rejet avec g la loi uniforme sur $[0,1]$ et $M=2$ et toujours Y uniformément dans $[0,\frac{1}{2}]$.

Exercice 3

1. $\text{Card}(\Sigma) = 6$. Or $\dim(Q) = 8 \neq \text{Card}(\Sigma)$, donc (K,Σ,Q) n'est pas un élément fini.
   $\dim(P) = 6 = \text{Card}(\Sigma)$ et le seul polynôme qui s'annule sur Σ est le polynôme identiquement nul, donc (K,Σ,P) est un élément fini.
2. $p_1(x,y,z) = x(1-z)$, $p_2(x,y,z) = y(1-z)$, $p_3(x,y,z) = (1-x-y)(1-z)$, $p_4(x,y,z) = xz$, $p_5(x,y,z) = yz$ et $p_6(x,y,z) = z(1-x-y)$
3. On peut montrer que $\hat{\Sigma} = F(\Sigma)$ avec
   $F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + b \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   A est inversible donc F aussi, et P est invariant par une fonction affine inversible, donc $(\hat{K},\hat{\Sigma},P)$ est un élément fini affine-équivalent à (K,Σ,P).
4. $\hat{p}_3(x,y,z) = p_3(1-y,1-x,z) = (x+y-1)(1-z)$ et $\hat{p}_5 = z(1-x)$

5. l'espace des solutions est $E_h = \{v \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}); \forall K \in \Phi_h, v_{|K} \in P \text{ et } v_{|\Gamma} = 0\}$ avec Φ_h la triangulation du cube Ω obtenue avec les prismes étudiés précédemment.
La dimension de E_h est la taille de sa base que l'on définit en chaque nœud de la triangulation n'appartenant pas à la frontière (car u est nulle sur Γ), soit 8.

TELECOM SudParis, EI1, Module MAT 3501, année scolaire 2007/08
Coordonnateur : Annabelle Joannic-Chardin

Analyse Numérique

Examen du 31 mars 2008
Durée : 1 heure 30
Aucun document, ni calculatrice ne sont autorisés

N.B. Les exercices sont indépendants et ainsi que certaines questions d'un même exercice.

Exercice 1 *Influence du conditionnement*

On rappelle la définition de la norme 1 vectorielle sur $\mathbb{R}^n$, ainsi que celle de la norme matricielle associée :

$$\|x\|_1 = \sum_{1\leq i\leq n} |x_i| \qquad \|A\|_1 = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}.$$

1. Montrer que $\|A\|_1 = \max\limits_{1\leq j\leq n} \sum\limits_{1\leq i\leq n} |A_{ij}|$.

   Pour cela, poser $\alpha = \max\limits_{1\leq j\leq n} \sum\limits_{1\leq i\leq n} |A_{ij}|$ et montrer l'inégalité $\alpha \leq \|A\|_1$ et l'inégalité inverse.

2. Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 100 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
   (a) Calculer le conditionnement de A en norme 1.
   (b) Considérons les systèmes suivants : $Ax = \begin{bmatrix} 100 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $A(x+\delta x) = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix}$.
   Calculer la variation relative $\frac{\|\delta x\|_1}{\|x\|_1}$ et celle du second membre. Quel est le facteur d'amplitude de l'erreur ? Comparer avec le conditionnement.
   (c) Ecrire les commandes Matlab résolvant les deux questions précédentes.

Exercice 2 *Éléments finis*

On considère le prisme K de sommets $\Sigma = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$ avec $s_1 = (0,0,0)$, $s_2 = (0,1,0)$, $s_3 = (0,0,1)$, $s_4 = (1,0,0)$, $s_5 = (1,1,0)$ et $s_6 = (1,0,1)$. Soit P l'ensemble des polynômes de trois variables de la forme $p(x,y,z) = c_0 + c_1x + c_2y + c_3z + c_4xy + c_5xz$.

1. Montrer que (K, Σ, P) est un élément fini de Lagrange.
2. Donner les fonctions de forme de (K, Σ, P).
3. On veut utiliser les éléments finis de type (K, Σ, P) pour obtenir une approximation du problème de Dirichlet dans $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} -\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + u = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma \text{ et en dehors de } \Omega \end{cases}$$

   avec Ω un parallèlépipède de sommets $(0,0,0)$, $(0,4,0)$, $(2,0,0)$, $(2,4,0)$, $(0,0,3)$, $(0,4,3)$, $(2,0,3)$, $(2,4,3)$ et Γ l'ensemble de ces faces.
   En s'inspirant de la méthode du cours sur $\mathbb{R}^2$, proposer un espace de dimension finie dans lequel rechercher la solution approchée au problème de Dirichlet. Préciser sa dimension.

4. À l'aide de la base, on sait que la formulation variationnelle $a(u,v) = L(v)$ revient à résoudre un système d'équations de type $Au = b$. Représenter la matrice A en mettant une croix lorsque l'élément est non nul et 0 sinon, en ayant numéroté les nœuds de la triangulation de gauche à droite, puis de haut en bas.
5. Donner la valeur du premier élément de A.

Exercice 3 *Variante de l'algorithme d'acceptation-rejet*

On considère une caméra de vidéosurveillance d'une société. Sa durée de vie est Z qu'on supposera aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1 (rappel : une loi exponentielle de paramètre λ a pour densité : $h(x) = \lambda \exp(-\lambda x)\mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}$).

On supposera que l'instant d'arrivée du premier employé aux plages d'ouverture des portes est Y et que Y suit une loi de densité $g(y) = \mathbb{1}_{\{0\leq y\leq 1\}} a y^{a-1}$.

On s'intéresse à X instant d'arrivée du premier employé **détecté par la caméra**. On peut montrer que la loi de X est la loi de Y conditionnellement au fait que la caméra est en état de marche. On admettra que la loi de X a pour densité $f(x) = c\left(\mathbb{1}_{\{0\leq x\leq 1\}} a x^{a-1}\right) e^{-x}$.

1. Comment simuler Z ?
2. Proposer et décrire une méthode pour simuler Y.
3. A quelle condition peut-on simuler suivant f à l'aide de l'algorithme d'acceptation-rejet avec g pour densité simulable ? En utilisant un résultat du cours, donner la probabilité d'acceptation sans calcul.
4. Nous nous intéressons maintenant à une variante de l'algorithme d'acceptation-rejet. On considère qu'une densité f peut s'écrire sous la forme $f(x) = cg(x)\left(1 - \int_{-\infty}^{x} h(u)du\right)$ où c est une constante, g et h sont des densités. On notera dans la suite $H(x) = \int_{-\infty}^{x} h(u)du$, la fonction de répartition associée à la densité h. On remarquera que H est comprise entre 0 et 1.
   On se propose de simuler une variable aléatoire X de densité f de la manière suivante :

   ALGORITHME DE VADUVA

   i) Simuler indépendamment Y suivant la densité g et Z suivant la densité h.
   ii) Si $Y < Z$ alors poser $X = Y$. Sinon, retourner en i.

   On simule ainsi indépendamment $Y_1, Y_2, \ldots$ suivant g et $Z_1, Z_2, \ldots$ suivant h et on pose $X = Y_T$ où T est le premier entier pour lequel la condition $\{Y_T < Z_T\}$ est vérifiée.
   (a) Montrer que $c = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}} g(x)(1-H(x))dx}$ et donc que c est supérieur à 1.
   (b) Nous allons montrer que la variable X simulée par l'algorithme de Vaduva suit bien une loi de densité f.
      i. Montrer que $P(Y < x \text{ et } Y < Z) = \int_{-\infty}^{x} g(y)(1 - H(y))dy$.
      En déduire que $P(Y < Z) = 1/c$.
      ii. Montrer que $P(X < x \text{ et } T = k) = \prod_{i=1}^{k-1} P(Y_i \geq Z_i) P(Y_k < x \text{ et } Y_k < Z_k)$.
      iii. En utilisant la formule des probabilités totales, calculer $P(X < x)$ et en déduire que f est la densité de X.
   (c) Calculer la probabilité d'acceptation de l'algorithme de Vaduva.
5. Comparer l'algorithme d'acceptation-rejet avec celui de Vaduva.
6. Indiquer comment on peut appliquer l'algorithme de Vaduva pour simuler la variable X de la vidéosurveillance, en n'utilisant que des variables aléatoires uniformément distribuées sur $[0,1]$.
   Donner le code matlab réalisant cet algorithme.

Corrigé rapide de l'examen du 31 mars 2008 d'Analyse Numérique

Exercice 1 *Influence du conditionnement*

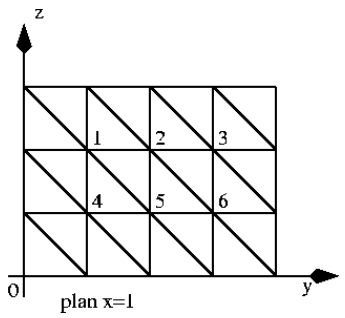
1. Montrons que $\alpha \geq \|A\|_1$.
   Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Alors $\|Ax\|_1 = \sum_{1\leq i\leq n} |\sum_{1\leq j\leq n} A_{ij}x_j| \leq \sum_{1\leq i\leq n}\sum_{1\leq j\leq n} |A_{ij}||x_j|$.
   Donc $\|Ax\|_1 \leq \sum_{1\leq j\leq n} |x_j| \left(\sum_{1\leq i\leq n} |A_{ij}|\right) \leq \sum_{1\leq j\leq n} \alpha|x_j|$ car $\sum_{1\leq i\leq n} |A_{ij}| \leq \alpha$ par définition de α.
   Comme α ne dépend pas de j, on en déduit que $\|Ax\|_1 \leq \alpha\|x\|_1$. Puisque cette inégalité est vraie pour tout x et que α est indépendant de x, on peut passer au max. CQFD

   Montrons que $\alpha \leq \|A\|_1$.
   Il existe k tel que $\alpha = \sum_{1\leq i\leq n} |A_{ik}|$. Soit y le vecteur composé que de 0, sauf sa $k^{\text{ième}}$ composante qui vaut 1.
   Alors $\|Ay\|_1 = \sum_{1\leq i\leq n} |A_{ik}| = \alpha$ et $\|y\|_1 = 1$. D'où $\alpha = \frac{\|Ay\|_1}{\|y\|_1} \leq \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \|A\|_1$. CQFD
2. Application
   (a) On rappelle que $\text{Cond}_1 A = \|A\|_1\|A^{-1}\|_1$. Or $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -100 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
   Donc $\|A\|_1 = 100 + 1 = 101$ et $\|A^{-1}\|_1 = |-100| + 1 = 101$. D'où $\text{Cond}_1 A = 101^2$.
   (b) Les systèmes $Ax = \begin{bmatrix} 100 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $A(x+\delta x) = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix}$ ont respectivement pour solution $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $x + \delta x = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix}$. Donc $\delta x = \begin{bmatrix} 100 \\ -1 \end{bmatrix}$ et $\Delta x = \frac{\|\delta x\|_1}{\|x\|_1} = \frac{101}{1} = 101$.
   La variation relative du second membre $\Delta b = \frac{\|\delta b\|_1}{\|b\|_1}$ avec $b = \begin{bmatrix} 100 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\delta b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ vaut $\frac{1}{101}$.
   Le facteur d'amplification de l'erreur vaut $\frac{\Delta x}{\Delta b} = 101^2 = \text{Cond}_1 A$.

Exercice 2 *Éléments finis*

1. Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)$. On montre qu'il existe un unique polynôme p de P tel que $\forall i = 1 \ldots 6,\ p(s_i) = \alpha_i$. C'est le polynôme de la forme $p(x,y,z) = \alpha_1 + (\alpha_4 - \alpha_1)x + (\alpha_2 - \alpha_1)y + (\alpha_3 - \alpha_1)z + (\alpha_5 + \alpha_1 - \alpha_4 - \alpha_2)xy + (\alpha_6 + \alpha_1 - \alpha_4 - \alpha_3)xz$.
2. $p_1(x,y,z) = (1-x)(1-y-z)$, $p_2(x,y,z) = y(1-x)$, $p_3(x,y,z) = z(1-x)$, $p_4(x,y,z) = x(1-y-z)$, $p_5(x,y,z) = xy$ et $p_6(x,y,z) = xz$.
3. On pave le parallèlépipède avec des carrés de côté 1, que l'on recoupe en deux pour obtenir des prismes comme étudiés ci-dessus. On obtient une triangulation Φ_h du domaine Ω contenant 48 prismes. L'espaces des solutions E_h est l'ensemble des fonctions v continues dans Ω telles que $\forall K \in \Phi_h,\ v_{|K} \in P_K$ et $v_{|\Gamma} = 0$.
   Pour connaître sa dimension, on compte uniquement les nœuds intérieurs (sommets des prismes) car on cherche des solutions nulles sur la frontière : il y en a 6. Donc $\dim E_h = 6$.

4. Dans la figure, on représente le plan $x = 1$ avec les arêtes des prismes et la numérotation des nœuds. La matrice est symétrique et de la forme $A = \begin{bmatrix} X & X & 0 & X & X & 0 \\ & X & X & 0 & X & X \\ & & X & 0 & 0 & X \\ & & & X & X & 0 \\ & & & & X & X \\ & & & & & X \end{bmatrix}$.



5. $A_{11} = \int_\Omega \left(\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)^2 \right) dx\, dy\, dz.$
Il faut alors déterminer la forme de φ_1 dans chacun des prismes auquel le point 1 appartient, calculer les dérivées partielles, puis intégrer la somme dans chacun des primes. On obtient $\frac{16}{3}$.

Exercice 3 *Variante de l'algorithme d'acceptation-rejet*

1. méthode de la fonction de répartition inverse : u tirage uniforme sur $[0, 1]$ et $z = H^{-1}(u) = -\log(1 - u)$ (ou $z = -\log u$).
2. On a $G(y) = y^a$ donc méthode de la fonction de répartition inverse : u tirage uniforme sur $[0, 1]$ et $y = G^{-1}(u) = u^{1/a}$.
3. Il faut qu'il existe M tel que $f \leq Mg$. Comme $e^{-x} \leq 1$, on a ici $f \leq cg$. On peut appliquer l'algorithme d'acceptation-rejet avec $M = c$ et la probabilité d'acceptation sera $\frac{1}{c}$.
4. Algorithme de Vaduva
   (a) $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$ (f est une densité) donc $c = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}} g(x)(1-H(x))dx}$.
   $0 \leq H(x) \leq 1$ donc $0 \leq g(x)(1 - H(x)) \leq g(x)$. On passe aux intégrales et comme g est une densité, on a $\int_{\mathbb{R}} g(x)(1 - H(x))dx \leq 1$. CQFD
   (b) Attention : avant le (iii), on ne sait pas que X est de densité f !
      i. $P(Y < x \text{ et } Y < Z) = \int_{y \leq x, y \leq z} f_{YZ}(y, z)dy\, dz.$
      Y et Z sont indépendants donc $f_{YZ}(y, z) = g(y)h(z)$.
      Donc $P(Y < x \text{ et } Y < Z) = \int_{y=-\infty}^{x} g(y) \int_{z=y}^{+\infty} h(z)dz\, dy = \int_{-\infty}^{x} g(y)(1 - H(y))dy$
      $P(Y < Z)$ est la limite en $+\infty$ de la proba précédente :
      $P(Y < Z) = \int_{\mathbb{R}} g(y)(1 - H(y))dy = 1/c.$
      ii. $P(X < x \cap T = k) = P(Y_1 \geq Z_1, \ldots, Y_{k-1} \geq Z_{k-1}, Y_k < Z_k, Y_k < x)$.
      Les couples (Y_i, Z_i) sont indépendants entre eux d'où $P(X < x \cap T = k) = \prod_{i=1}^{k-1} P(Y_i \geq Z_i)P(Y_k < x \text{ et } Y_k < Z_k)$.
      iii. $P(X < x) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X < x \cap T = k)$.
      Or $P(X < x \cap T = k) = (1 - \frac{1}{c})^{k-1} \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} (1 - \frac{1}{c})^{k-1} = c$ (car $c \geq 1$).
      D'où $P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$ et X admet bien f pour densité.

(c) La probabilité d'acceptation est $P(Y < Z)$, soit $1/c$.

5. Les deux algorithmes sont similaires du point de vue de leur probabilité d'acceptation. On choisira donc l'algorithme d'acceptation rejet si g simulable et H explicite car il faut que $f(x)/(cg(x)) = 1 - H(x)$ soit calculable (h n'a pas besoin d'être simulable), et on choisira l'algorithme de Vaduva pour g simulable et h simulable (H n'a pas besoin d'être explicite).
6. On reconnaît que f peut s'écrire sous la forme $f(x) = cg(x)(1 - \int_{-\infty}^{x} h(u)du)$ en ayant posé $g(x) = \mathbb{1}_{\{0 \leq x \leq 1\}} a x^{a-1}$ et $h(x) = \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}} \exp(-x)$, densité de la loi exponentielle de paramètre 1. D'après les questions 1 et 2, l'algorithme de Vaduva s'écrit alors :
   i) Simuler U et V deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$. Poser $Y = U^{1/a}$ et $Z = -\log(V)$.
   ii) Si $Y < Z$ alors poser $X = Y$. Sinon, retourner en i.