TELECOM & Management SudParis – **T**ELECOM SudParis
Module MAT 3501
Coordonateur : Wojciech Pieczynski

Analyse Numérique

Examen 1, 2008/09
18 mars 2009
Durée : 1 heure 30
Seule une feuille manuscrite recto-verso est autorisée – Calculatrices interdites

N. B. Les exercices sont indépendants

Exercice 1

Soit $E = L^2\left(\left[0;1\right]\right)$ l'ensemble des fonctions définies sur $\left[0;1\right]$ et de carré intégrable. Pour tout couple de fonctions $(u,v) \in E^2$, $\langle u,v \rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx$ définit un produit scalaire et $\left(E, \langle .\ ,\ . \rangle\right)$ est un espace de Hilbert.

Soit $f \in E$. On considère le problème ponctuel suivant :

$$(\mathcal{P}): \begin{cases} \text{trouver } u \in E \text{ telle que :} \\ \forall x \in]0;1[, -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1+x)\dfrac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\right) = f(x), \\ u(0) = \alpha \text{ et } u(1) = \beta. \end{cases}$$

Ce problème n'ayant pas de solution algébrique, l'exercice porte sur les deux méthodes générales d'approximation que sont la méthode des différences finies (point 1.) et la méthode des éléments finis (points 2. et 3.).

Soit N un entier positif. On considère dans la suite que $h = \dfrac{1}{N+1}$, et pour tout $i \in \{0,1,...,N+1\}, x_i = ih.$

1. La résolution du problème $(\mathcal{P})$ par la méthode des différences finies passe par une discrétisation de l'équation différentielle pour se ramener à un problème « approché » $(\mathcal{P}_h)$.
   a. Expliciter $(\mathcal{P}_h)$ et montrer qu'on se ramène à la résolution d'un système linéaire $(N+2)\times(N+2)$;
   b. Mettre $(\mathcal{P}_h)$ sous forme matricielle $A\vec{u} = 2h^2\vec{w}$, où A est une matrice $N \times N$;
   c. Ecrire le code Matlab permettant de construire $A, \vec{u}$ et $\vec{w}$ lorsque $\alpha = \beta = 0$.
   d. Ecrire le code Matlab permettant de donner la solution de $(\mathcal{P}_h)$.

On considèrera dans la suite que $\alpha = \beta = 0$

2. En introduisant une fonction auxiliaire $v \in E$ dérivable et telle que $v(0) = v(1) = 0$, donner, en utilisant l'intégration par parties, la formulation variationnelle $(\mathcal{P}')$ du problème $(\mathcal{P})$.

3. On souhaite résoudre le problème $(\mathcal{P}')$.

   a. Quelles sont les conditions suffisantes portant sur les applications *a* et *L* définies respectivement sur E^2 et E par $a(u,v) = \int_0^1 (1+x)u'(x)v'(x)dx$ et $L(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx$, pour que la solution de $(\mathcal{P}')$ soit unique ?

   b. Le problème approché de $(\mathcal{P}')$ est noté $(\mathcal{P}_h')$. Expliciter $(\mathcal{P}_h')$ et discuter l'unicité de sa solution.

   c. Soit $S = [b; b+h]$ un segment de longueur *h* et $\mathbb{P}_k$ l'ensemble des polynômes réels de degré inférieur ou égal à *k*. Montrer que les éléments $\left(S, \mathbb{P}_1, \Sigma_1 = \{b, b+h\}\right)$ et $\left(S, \mathbb{P}_2, \Sigma_2 = \left\{b, b+\frac{h}{2}, b+h\right\}\right)$ sont des éléments finis de Lagrange.

   Dans chaque cas, préciser la dimension de la matrice de rigidité associée à la « triangulation » du segment $[0;1]$ par les segments $\left([x_i; x_{i+1}]\right)_{0 \le i \le N}$.

   d. On considère $\left(S, \mathbb{P}_1, \Sigma_1 = \{b, b+h\}\right)$. Donner l'expression des polynômes de base p_i. Donner, en fonction des p_i, l'expression des fonctions de forme φ_k.

   e. Sachant que les coefficients de la matrice de rigidité vérifient $\left(A_{ij}'\right)_{1 \le i,j \le N} = a\left(\varphi_i, \varphi_j\right)$, montrer que $\forall i \in \{1, ..., N-1\}$, on a $A_{ii}' = 2\left(\frac{1}{h} + i\right)$ et $A_{ii+1}' = -\frac{1}{h} - i - \frac{1}{2}$;

   f. Ecrire la matrice de rigidité lorsque $N = 5$ et que l'on numérote les nœuds $s_k = x_k$.

Exercice 2

Considérons la loi de Laplace de paramètre λ de densité : $\forall x \in R$, $g_\lambda(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$, $\lambda > 0$.

1. Vérifier que g_λ est bien une densité de probabilité et donner l'expression de sa fonction de répartition G_λ.
2. En déduire une méthode de simulation de réalisations de cette loi. Ecrire le code Matlab correspondant.
3. Soit f la densité de la loi normale centrée réduite. Montrer que l'on peut utiliser g_λ pour simuler des réalisations de la loi normale centrée réduite par la méthode d'acceptation-rejet. (on pourra montrer qu'il existe M_λ tel que $\forall x \in R$, $f(x) \le M_\lambda g_\lambda(x)$).
4. Préciser le choix de λ minimisant la probabilité de rejet et écrire le code Matlab permettant la simulation de réalisations de la loi normale centrée réduite par cette méthode.

Rappels

- *Conséquences des formules de Taylor* :

Pour toute fonction T deux fois dérivable on a les approximations suivantes :

$$\frac{dT}{dx}(x_i) \approx \frac{T(x_i+\Delta x)-T(x_i)}{\Delta x} \qquad +\Delta x(\ldots) \qquad \text{Décentré droit}$$

$$\frac{dT}{dx}(x_i) \approx \frac{T(x_i)-T(x_i-\Delta x)}{\Delta x} \qquad +\Delta x(\ldots) \qquad \text{Décentré gauche}$$

$$\frac{d^2T}{dx^2}(x_i) \approx \frac{T(x_i-\Delta x)-2T(x_i)+T(x_i+\Delta x)}{\Delta x^2} \qquad +\Delta x^2(\ldots) \qquad \text{Centré}$$

$$\frac{dT}{dx}(x_i) \approx \frac{T(x_i+\Delta x)-T(x_i-\Delta x)}{2\Delta x} \qquad +\Delta x^2(\ldots) \qquad \text{Centré}$$

- *Problème variationnel* :

Dans un espace de Hilbert, E, étant donnée une forme bilinéaire continue a, et une forme linéaire continue L, un problème variationnel (Q) consiste à :

$$(Q): \begin{cases} \text{trouver } u \in E \text{ tel que} \\ a(u,v) = L(v), \quad \forall v \in E \end{cases}$$

- *Fonctions de base* :

Etant donné un élément fini de Lagrange $(K, P, \Sigma = \{a_1, ..., a_M\})$, on appelle fonctions de base les M fonctions p_M p_1, …, p_M vérifiant $p_i(a_j) = \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker : $\delta_{ij} = 1$ pour $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ pour $i \neq j$).

- *Méthode d'acceptation-rejet* :

Considérons une densité à simuler f, une densité simulable g, et une constante connue M pour laquelle

$$f(x) \leq Mg(x)$$

Alors f peut être simulée de la manière suivante :

(i) Simuler $Z = z$ selon g, et $U = u$ selon la loi uniforme sur $[0,1]$;

(ii) Prendre $x = z$ si $u \leq \frac{f(z)}{Mg(z)}$; retourner en (i) sinon.