TELECOM & Management SudParis – **T**ELECOM SudParis
Module MAT 3501
Coordonateur : Wojciech Pieczynski

Analyse Numérique

Examen 1, 2008/09
18 mars 2009
Durée : 1 heure 30
Seule une feuille manuscrite recto-verso est autorisée – Calculatrices interdites

N. B. Les exercices sont indépendants

Exercice 1

Soit $E = L^2\left([0;1]\right)$ l'ensemble des fonctions définies sur $[0;1]$ et de carré intégrable. Pour tout couple de fonctions $(u,v) \in E^2$, $\langle u,v \rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx$ définit un produit scalaire et $\left(E, \langle .\ ,\ . \rangle\right)$ est un espace de Hilbert.

Soit $f \in E$. On considère le problème ponctuel suivant :

$$(\mathcal{P}): \begin{cases} \text{trouver } u \in E \text{ telle que :} \\ \forall x \in]0;1[, -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1+x)\dfrac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\right) = f(x), \\ u(0) = \alpha \text{ et } u(1) = \beta. \end{cases}$$

Ce problème n'ayant pas de solution algébrique, l'exercice porte sur les deux méthodes générales d'approximation que sont la méthode des différences finies (point 1.) et la méthode des éléments finis (points 2. et 3.).

Soit N un entier positif. On considère dans la suite que $h = \dfrac{1}{N+1}$, et pour tout $i \in \{0,1,...,N+1\}, x_i = ih.$

1. La résolution du problème $(\mathcal{P})$ par la méthode des différences finies passe par une discrétisation de l'équation différentielle pour se ramener à un problème « approché » $(\mathcal{P}_h)$.

   a. Expliciter $(\mathcal{P}_h)$ et montrer qu'on se ramène à la résolution d'un système linéaire $(N+2)\times(N+2)$;

On a $\forall x \in]0;1[, -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1+x)\dfrac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\right) = -\dfrac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x} - (1+x)\dfrac{\mathrm{d}^2u(x)}{\mathrm{d}x^2}$ donc pour tout $x_i, i \in \{1,...,N\}$ on a $-\dfrac{u(x_{i+1})-u(x_{i-1})}{2h} - (1+x_i)\dfrac{u(x_{i+1})-2u(x_i)+u(x_{i-1})}{h^2} = f(x_i)$. $\forall i \in \{0,...,N+1\}$, on pose $u_i = u(x_i)$, alors

$$-\frac{h(u_{i+1}-u_{i-1})}{2h^2} - 2(1+ih)\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{2h^2} = -\frac{(2+h+2ih)u_{i+1} - 4(1+ih)u_i + (2-h+2ih)u_{i-1}}{2h^2} = f(x_i)$$

et le problème $(\mathcal{P}_h)$ correspond à la recherche de $(u_0,...,u_{N+1})$ solution réelle du système :

$$(S):\begin{cases} u_0=\alpha,\ u_{N+1}=\beta, \\ -(2+(2i-1)h)u_{i-1}+4(1+ih)u_i-(2+(2i+1)h)u_{i+1}=2h^2 f(x_i), \forall i\in\{1,...,N\} \end{cases}.$$

b. Mettre $(\mathcal{P}_h)$ sous forme matricielle $A\vec{u}=2h^2\vec{w}$, où A est une matrice $N\times N$;

u_0 et u_{N+1} sont définis par les deux premières équations de (S). On pose donc

$$\vec{u}=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ ... \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix}, \vec{w}=\begin{pmatrix} f(x_1)+\dfrac{(2+h)\alpha}{2h^2} \\ f(x_2) \\ ... \\ f(x_{N-1}) \\ f(x_N)+\dfrac{(2+(2N+1)h)\beta}{2h^2} \end{pmatrix} \text{ et } A=\begin{bmatrix} 4(1+h) & -(2+3h) & 0 & 0 & ... & 0 \\ -(2+3h) & 4(1+2h) & -(2+5h) & 0 & ... & 0 \\ 0 & -(2+5h) & 4(1+3h) & -(2+7h) & & \\ & & & & & \\ 0 & ... & 0 & -(2+(2N-3)h) & 4(1+(N-1)h) & -(2+(2N-1)h) \\ 0 & ... & 0 & 0 & -(2+(2N-1)h) & 4(1+Nh) \end{bmatrix}$$

c. Ecrire le code Matlab permettant de construire $A,\vec{u}$ et $\vec{w}$ lorsque $\alpha=\beta=0$.

$\vec{u}$ est le vecteur inconnu et ne sera trouvé qu'après inversion de A.

$\vec{w}$: On suppose connue la fonction f :

```
xi=linspace(0,1,N+2);
x=xi.';
g=f(x);
w=g(2:N+1);
```

Pour la matrice A :

```
A=zeros(N);
h=1/(N+1);
A(1,1)=4*(1+h);
for i=2:N
  A(i,i)=4*(1+i*h);
  A(i-1,i)=-2-(2*i-1)*h;
  A(i,i-1)= A(i-1,i);
end
```

d. Ecrire le code Matlab permettant de donner la solution de $(\mathcal{P}_h)$.

Le code est :

```
w=2*h^2*w ;
u=A\w ;
```

On considèrera dans la suite que $\alpha = \beta = 0$

2. En introduisant une fonction auxiliaire $v \in E$ dérivable et telle que $v(0) = v(1) = 0$, donner, en utilisant l'intégration par parties, la formulation variationnelle $(\mathcal{P}')$ du problème $(\mathcal{P})$.

On a $\forall x \in]0;1[, -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1+x)\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\right)v(x) = f(x)v(x)$ que l'on intégre par parties pour obtenir $\int_0^1 \left((1+x)u'(x)\right)v'(x)dx - \left[\left((1+x)u'(x)\right)v(x)\right]_0^1 = \int_0^1 f(x)v(x)dx$ ce qui, compte tenu des conditions de Dirichlet s'écrit également : $\int_0^1 (1+x)u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx$. La formulation variationnelle de $(\mathcal{P})$ est donc :

$$(\mathcal{P}'): \begin{cases} \text{trouver } u \in E \text{ tel que} \\ \int_0^1 (1+x)u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in E \end{cases}$$

3. On souhaite résoudre le problème $(\mathcal{P}')$.

   a. Quelles sont les conditions suffisantes portant sur les applications a et L définies respectivement sur E^2 et E par $a(u,v) = \int_0^1 (1+x)u'(x)v'(x)dx$ et $L(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx$, pour que la solution de $(\mathcal{P}')$ soit unique ?

Voir les hypothèses du Théorème de Lax-Milgram.

   b. Le problème approché de $(\mathcal{P}')$ est noté $(\mathcal{P}_h')$. Expliciter $(\mathcal{P}_h')$ et discuter l'unicité de sa solution.

Soit E_h un sous espace de E de dimension finie. Le problème approché de $(\mathcal{P}')$ est alors :

$$(\mathcal{P}_h'): \begin{cases} \text{trouver } u_h \in E_h \text{ tel que} \\ \int_0^1 (1+x)u_h'(x)v_h'(x)dx = \int_0^1 f(x)v_h(x)dx, \quad \forall v_h \in E_h \end{cases}$$

Les conditions suffisantes précédentes assurent l'unicité de la solution de $(\mathcal{P}_h')$.

   c. Soit $S = [b;b+h]$ un segment de longueur h et $\mathbb{P}_k$ l'ensemble des polynômes réels de degré inférieur ou égal à k. Montrer que les éléments $\left(S, \mathbb{P}_1, \Sigma_1 = \{b, b+h\}\right)$ et $\left(S, \mathbb{P}_2, \Sigma_2 = \left\{b, b+\frac{h}{2}, b+h\right\}\right)$ sont des éléments finis de Lagrange.

   Dans chaque cas, préciser la dimension de la matrice de rigidité associée à la « triangulation » du segment $[0;1]$ par les segments $\left([x_i; x_{i+1}]\right)_{0 \le i \le N}$.

$\left(S,\mathbb{P}_1,\Sigma_1=\{b,b+h\}\right)$: $\dim(\mathbb{P}_1)=Card(\Sigma_1)$ et la seule fonction affine s'annulant en 2 points est identiquement nulle. C'est donc bien un élément fini de Lagrange. Il y a alors N points « intérieurs » dans la triangulation associée et la matrice de rigidité est de taille $N\times N$.

$\left(S,\mathbb{P}_2,\Sigma_2=\{b,b+h/2,b+h\}\right)$: $\dim(\mathbb{P}_2)=Card(\Sigma_2)$ et le seul polynôme de degré 2 s'annulant en 3 points est identiquement nul. C'est donc bien un élément fini de Lagrange. Il y a alors $2N+1$ points « intérieurs » dans la triangulation associée et la matrice de rigidité est de taille $(2N+1)\times(2N+1)$.

d. On considère $\left(S,\mathbb{P}_1,\Sigma_1=\{b,b+h\}\right)$. Donner l'expression des polynômes de base p_i. Donner, en fonction des p_i, l'expression des fonctions de forme φ_k.

Il y a deux polynôme de base, $p_1(x)=a_1x+b_1$ et $p_2(x)=a_2x+b_2$ tels que $\begin{cases}p_1(b)=1\\p_1(b+h)=0\end{cases}$ et $\begin{cases}p_2(b)=0\\p_2(b+h)=1\end{cases}$. On a donc $p_1(x)=\frac{1}{h}(h+b-x)$ et $p_2(x)=\frac{1}{h}(x-b)$.

La fonction de forme φ_k est définie sur les segments consécutifs $[(k-1)h;kh]$ et $[kh;(k+1)h]$ par :

$$\varphi_k(x)=\frac{1}{h}(x-(k-1)h)\mathbb{I}_{[(k-1)h;kh]}(x)+\frac{1}{h}((k+1)h-x)\mathbb{I}_{[kh;(k+1)h]}(x)$$

e. Sachant que les coefficients de la matrice de rigidité vérifient $\left(A_{ij}'\right)_{1\le i,j\le N}=a(\varphi_i,\varphi_j)$, montrer que $\forall i\in\{1,...,N-1\}$, on a $A_{ii}'=2\left(\frac{1}{h}+i\right)$ et $A_{ii+1}'=-\frac{1}{h}-i-\frac{1}{2}$;

$$A_{ii}'=\int_0^1(1+x)\varphi_i'(x)\varphi_i'(x)dx=\int_{x_{i-1}}^{x_i}(1+x)\varphi_i'(x)^2dx+\int_{x_i}^{x_{i+1}}(1+x)\varphi_i'(x)^2dx=\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{(1+x)}{h^2}dx+\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{(1+x)}{(-h)^2}dx=2\left(\frac{1}{h}+i\right)$$

et $A_{ii+1}'=\int_{x_i}^{x_{i+1}}(1+x)\varphi_i'(x)\varphi_{i+1}'(x)dx=-\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{(1+x)}{h^2}dx=-\frac{1}{h}-i-\frac{1}{2}$

f. Ecrire la matrice de rigidité lorsque $N=5$ et que l'on numérote les nœuds $s_k=x_k$.

Le calcul de A_{NN}' est identique aux autres A_{ii}'et pour $j\notin\{i,i+1\}$, $A_{ij}'=0$. De plus, la matrice A' est symétrique. On a donc :

$$A=\begin{bmatrix}14&-7,5&0&0&0\\-7,5&16&-8,5&0&0\\0&-8,5&18&-9,5&0\\0&0&-9,5&20&-10,5\\0&0&0&-10,5&22\end{bmatrix}$$

Exercice 2

Considérons la loi de Laplace de paramètre λ de densité : $\forall x \in R$, $g_\lambda(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$, $\lambda > 0$.

1. Vérifier que g_λ est bien une densité de probabilité et donner l'expression de sa fonction de répartition G_λ .

g_λ est une fonction positive et $\int_{\mathbb{R}} g_\lambda(t)dt = \int_{-\infty}^{0} \frac{\lambda}{2} e^{\lambda t} dt + \int_{0}^{+\infty} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda t} dt = 2 \times \frac{1}{2} = 1$. g_λ est bien une densité.

si $x \le 0$, $G_\lambda(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{\lambda}{2} e^{\lambda t} dt = \frac{1}{2} e^{\lambda x}$ et si $x > 0$, $G_\lambda(x) = \int_{-\infty}^{0} \frac{\lambda}{2} e^{\lambda t} dt + \int_{0}^{x} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda t} dt = 1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda x}$.

On a donc $G_\lambda(x) = \frac{1}{2} e^{\lambda x} \mathbb{I}_{\mathbb{R}^-} + \left(1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda x}\right) \mathbb{I}_{\mathbb{R}^{+*}}$

2. En déduire une méthode de simulation de réalisations de cette loi. Ecrire le code Matlab correspondant.

Il faut utiliser la méthode de la fonction de répartition inverse :

Pour $y \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, $G_\lambda^{-1}(y) = \frac{1}{\lambda} \log(2y)$ et pour $y \in \left]\frac{1}{2}; 1\right]$, $G_\lambda^{-1}(y) = -\frac{1}{\lambda} \log\left(2(1-y)\right)$. Le code Matlab permettant de générer la réalisation z suivant g_λ est alors :

```
u=rand();
z=1/lambda*log(2*u)*(u<=0.5)-1/lambda*log(2*(1-u))*(u>0.5);
```

3. Soit f la densité de la loi normale centrée réduite. Montrer que l'on peut utiliser g_λ pour simuler des réalisations de la loi normale centrée réduite par la méthode d'acceptation-rejet. (on pourra montrer qu'il existe M_λ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \le M_\lambda g_\lambda(x)$).

On a $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{f(x)}{g_\lambda(x)} = \frac{2}{\lambda\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2} + \lambda|x|\right) = \frac{\sqrt{2}}{\lambda\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{(|x|-\lambda)^2 - \lambda^2}{2}\right)$ qui atteint son maximum sur $\mathbb{R}$ lorsque $(|x|-\lambda)^2$ est minimum c'est-à-dire lorsque $x = \pm\lambda$.

On a alors : $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{f(x)}{g_\lambda(x)} \le \frac{\sqrt{2}}{\lambda\sqrt{\pi}} \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)$ et on choisit $M_\lambda = \frac{\sqrt{2}}{\lambda\sqrt{\pi}} \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)$.

4. Préciser le choix de λ minimisant la probabilité de rejet et écrire le code Matlab permettant la simulation de réalisations de la loi normale centrée réduite par cette méthode.

La probabilité de rejet est minimale lorsque M_λ (ou $m(\lambda)=\frac{1}{\lambda}\exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)$) est minimum. Comme $m'(\lambda)=\exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\left(1-\frac{1}{\lambda^2}\right)$, c'est le choix de $\lambda=1$ qui minimise la probabilité de rejet. On a alors $M_1=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp\left(\frac{1}{2}\right)$ et $\forall x\in\mathbb{R}, \frac{f(x)}{M_1 g_1(x)}=\exp\left(-\frac{(|x|-1)^2}{2}\right)$.

Pour générer une réalisation *n* d'une variable aléatoire suivant une loi normale centrée et réduite le code Matlab est :

```
ok=0;
while ~ok
    u=rand();
    z=log(2*u)*(u<=0.5)-log(2*(1-u))*(u>0.5);
    w=rand();
    if w <= exp(-0.5*(abs(z)-1)^2)
       n=z; ok=1;
   end
end
```

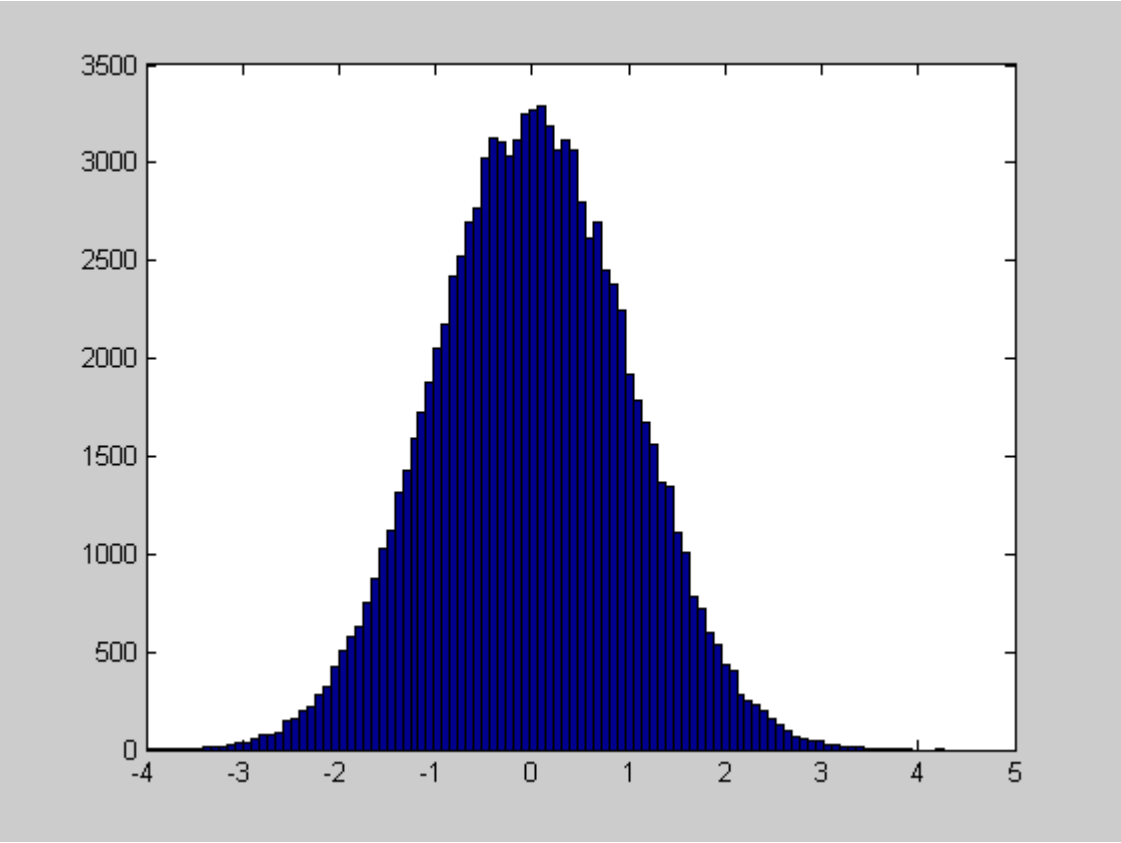

fig.1 Exemple d'histogramme des effectifs simulés grâce à cette méthode.