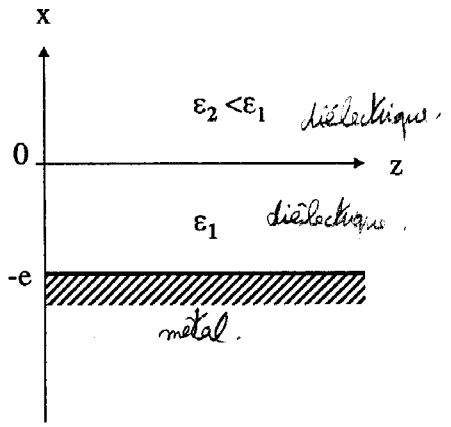
Institut National des télécommunications
PG12 - Contrôle de connaissances *18/04/2006*

Durée : 1h30

Eléments autorisés : calculatrice , polycopiés « PG12 cours + exercices » & « PG12 exercices corrigés »

Enoncé : On considère une couche diélectrique d'épaisseur e, de permittivité ε_1 recouvrant un plan métallique infiniment conducteur surmonté d'une couche diélectrique de permittivité relative ε_2 avec $\varepsilon_2<\varepsilon_1$. On recherche les modes guidés de type TE susceptibles de se propager suivant la direction Oz.



On rappelle les points fondamentaux suivants :

- Toutes les composantes de champ s'écrivent sous la forme $\overline{U}(x,y,z,t) = U(x)\cdot e^{j(\omega t-\beta z)}$ avec β la constante de propagation des ondes dans la structure considérée. Il s'agit bien entendu de l'inconnue du problème.
- Toutes les composantes du champ électromagnétique s'expriment comme une combinaison linéaire de la seule composante H_z (mode TE). Plus précisément (cf. cours),

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{j\omega\mu_0}{\omega^2\mu_0\varepsilon_i - \beta^2}\dfrac{\partial H_z}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{H} = \begin{pmatrix} -\dfrac{j\beta}{\omega^2\mu_0\varepsilon_i - \beta^2}\dfrac{\partial H_z}{\partial x} \\ 0 \\ H_z \end{pmatrix}$$

- Toutes les composantes du champ électromagnétique sont solution dans chacun des deux milieux de l'équation d'Helmoltz :

$\dfrac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \chi_i^2 S = 0$ avec $S=H_z$ pour les modes TE

$$\text{et } \chi_i^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_i - \beta^2 = k_0^2 n_i^2 - \beta^2$$

- Du fait de l'apparition d'un courant surfacique à l'interface métal / diélectrique 1, seules les composantes normales de $\vec{H}$ sont continues.

Questions :

1) Résoudre les équations et donner l'expression de S dans chacun des milieux
2) Ecrire les relations de continuités sur les interfaces
3) Déduire la relation vérifiée par β pour qu'il existe une solution autre que la solution nulle
4) On pose

$$X = \frac{2\pi e}{\lambda}\sqrt{\varepsilon_1 - \left(\frac{\beta}{k_0}\right)^2} \qquad Y = \frac{2\pi e}{\lambda}\sqrt{\left(\frac{\beta}{k_0}\right)^2 - \varepsilon_2}$$

Montrer que l'équation de dispersion est de la forme

$$Y = -\frac{X}{\tan(X)}$$

5) Après avoir calculé $X^2 + Y^2$ proposez une méthode graphique pour résoudre l'équation de dispersion
6) A partir de la question 4, relier l'épaisseur normalisée $d = \frac{2\pi e}{\lambda}$ au paramètre $\alpha = \frac{\beta}{k_0}$. On donne ε_1=2.25, ε_2=1, e=1μm. Quelle est la longueur d'onde de coupure du mode fondamental.
7) Pour la même épaisseur, combien de modes TE existent à λ=1.4μm. Quelles sont les constantes de propagation de ces modes ?

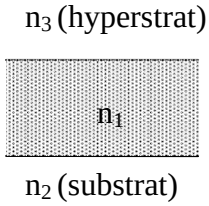
Contrôle PG12 – 1ère session
Durée : 1h30

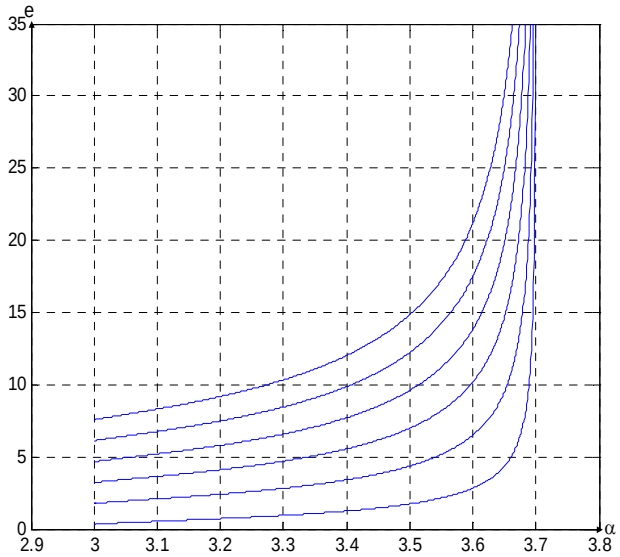
Les documents (polycopiés) et calculatrices sont autorisés.

Instructions : Afin de faciliter la correction, il vous est demandé de remettre sur des copies distinctes la première et deuxième partie. N'oubliez pas d'indiquer sur chaque copie (en haut à gauche) votre nom et prénom. Encadrez vos résultats s.v.p.

Première partie :

Exercice 1 : Diagramme de dispersion.





Guide plan et diagramme de dispersion (TE) associé

Dans la suite, on suppose que n1>n2>n3

1.1 En vous aidant du diagramme de dispersion, déterminez les indices n1 (cœur) et n2 (substrat) employés pour ces simulations. Justifiez votre réponse.

1.2 A la coupure, l'épaisseur normalisée du mode fondamental vaut e_0=0.27924. Quel est alors l'indice n_3 du superstrat.

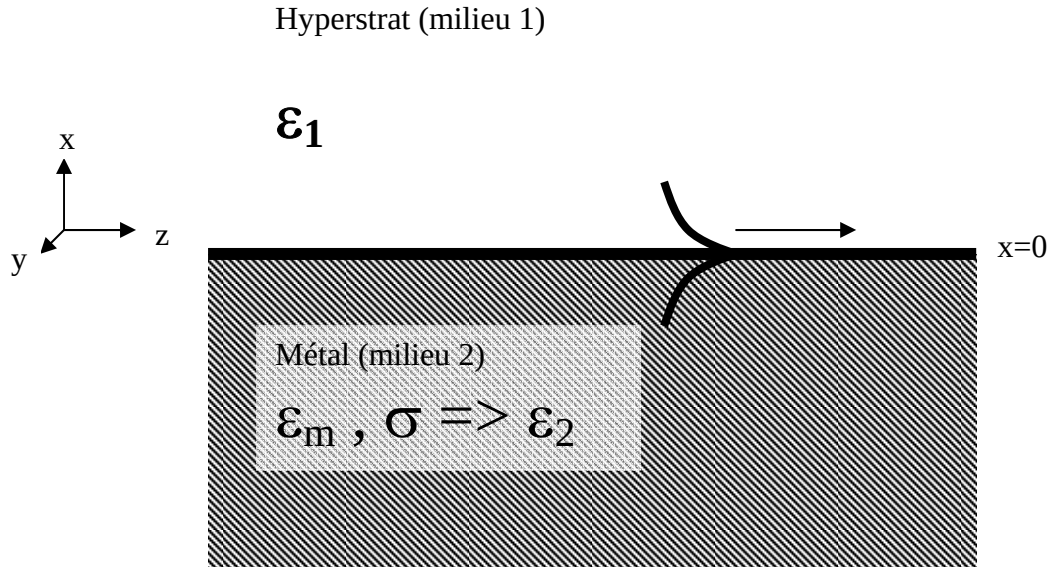
1.3 L'épaisseur du cœur du guide est de 1µm. Expliquez la démarche permettant de calculer le domaine de longueurs d'onde pour lequel le guide est monomode en polarisation TE. Faites l'application numérique ?

Exercice 2 : Ondes de surface

Dans cet exercice on cherche à déterminer si des modes guidés sont susceptibles d'exister à la surface d'un métal homogène non magnétique ($\mu=\mu_0$) et non parfait occupant l'espace x<0. Il vous est naturellement proposé de suivre la démarche employée au cours des BE d'optique guidée.

Les calculs se feront en polarisation TM. Pour cet état de polarisation, on peut montrer que la composante du champ Ey est nulle en tout point de l'espace. Toutes les composantes des champs comporteront le terme $e^{j(\omega t-\beta z)}$. Du fait de l'invariance du problème par toute translation suivant l'axe y, il est clair que $\frac{\partial}{\partial y} = 0$

On appellera $\vec{E}^{(i)}$ et $\vec{H}^{(i)}$ les champs dans le milieu i (i=1,2).



Les deux premières équations de Maxwell dans un métal non magnétique en régime harmonique sont :

$rot\ (\vec{E}^{(2)}) + i\omega\mu_0\vec{H}^{(2)} = \vec{0}$ **(1)**

$rot(\vec{H}^{(2)}) - i\omega\varepsilon_m\vec{E}^{(2)} - \vec{j} = \vec{0}$ **(2)** avec $\vec{j} = \sigma\vec{E}^{(2)}$. ε_m est la permittivité associée au métal et σ sa conductivité.

2.1 Montrer que dans le métal, l'équation (2) peut se rapporter à une équation de Maxwell **(2')** identique à celle d'un diélectrique à condition d'introduire une permittivité ε_2 que vous définirez (qui dépend de ε_m, ω et σ).

2.2 Grâce à un développement des équations (1) et (2'), et l'utilisation de la continuité des composantes tangentielles de $\vec{E}$ et $\vec{H}$, montrez que

$\frac{1}{\varepsilon_i}\frac{\partial Hy}{\partial x}$ et H_y sont continus à la traversée métal/hyperstrat.

2.3 En utilisant la relation $rot(rot(\vec{H}) = grad(div(\vec{H})) - \nabla^2\vec{H}$ et div(H)=0, exprimez l'équation différentielle que vérifie $H_y^{(i)}$ (introduire $\chi_i^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_i - \beta^2$ avec β la constante de propagation) dans chaque milieu

2.4 Résolvez l'équation différentielle trouvée en 2.3. Pour cela introduisez α_i dans chaque milieu. Par définition $\alpha_i \equiv \sqrt{\chi_i^2}$ avec α_i choisi de façon à avoir $Im(\alpha_i)>0$ (β sera à priori considéré comme complexe). Parmi les solutions générales, précisez dans chacun des milieux la forme des solutions permettant l'existence d'une onde guidée au voisinage de l'interface métal/hyperstrat.

2.5 On recherche les modes guidés dans une fenêtre spectrale située dans l'infrarouge. On peut alors négliger la partie réelle de ε_2 devant sa partie imaginaire. En utilisant (2.4) et (2.2), déterminez analytiquement β, solution des modes guidés.

Deuxième partie :

A faire sur une copie séparée

Exercice n°1

Considérons une ligne de transmission sans pertes, d'une longueur « d » égale au quart de la longueur d'onde spatiale et d'impédance caractéristique Z_0. Cette ligne est un transformateur d'impédance. Ce transformateur doit « adapter » une charge de 150Ω à une ligne représentant une impédance de 300Ω (voir figure 1). Déterminer l'impédance caractéristique Z_0 ainsi que le coefficient de réflexion sur la charge.

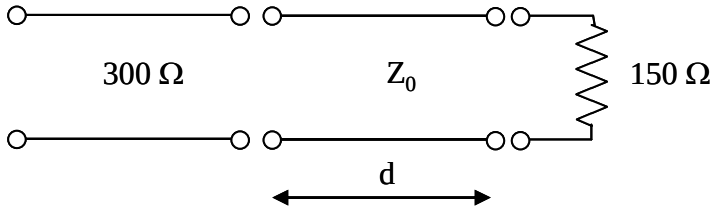


Figure 1

Exercice n°2

Soit une ligne de transmission sans pertes de 10 mètres de longueur d'impédance caractéristique 50Ω chargée par une impédance $Z_L = (100 + j50)\Omega$. Cette ligne est connectée à un générateur de fem 100 V et d'impédance interne Z_s égale à 50Ω (voir figure 2).

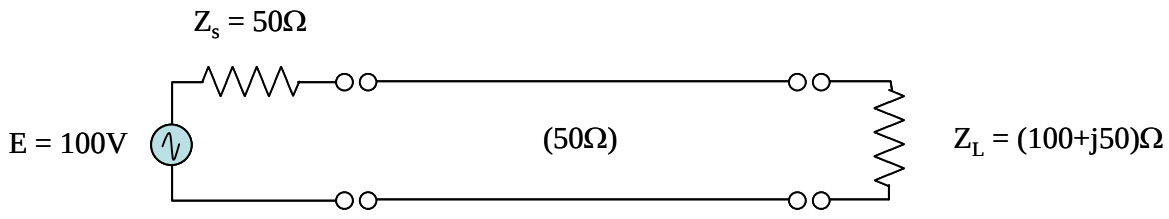


Figure 2

En considérant que la vitesse de phase du signal est de 200 m/µs à 26 MHz, déterminer l'impédance vue par le générateur à l'entrée de la ligne. Donner la puissance alors transmise à la charge.

Exercice n°3

Soit une ligne idéale de longueur l

1) a partir de l'expression générale de la tension et du courant sur cette ligne, lorsqu'elle est terminée par une charge, établir l'expression du coefficient de réflexion en tout point de la ligne, en fonction du coefficient de réflexion en bout de ligne (au niveau de la charge), de la constante de propagation β, et de la longueur de la ligne l.

2) en partant de la définition de l'impédance en un point quelconque de la ligne (en fonction de la tension et du courant), établir l'expression de cette impédance en fonction du coefficient de réflexion et de l'impédance caractéristique de la ligne Z_c.

3) en déduire que l'impédance en tout point de la ligne est imaginaire pure ou nulle, si la ligne est chargée par un court circuit.

Institut National des télécommunications
PG12 - Contrôle de connaissances – 2ème session *08/06/2006*
Durée : 1h30
Eléments autorisés : calculatrice , polycopiés « PG12 cours + exercices » & « PG12 exercices corrigés »

Exercice 1 :
On souhaite utiliser un câble coaxial en mode fondamental.
1.1 Quel est ce mode ?
1.2 Quelle est sa fréquence de coupure ?
1.3 Si le matériau diélectrique utilisé est du Téflon de permittivité relative 2,12 et la fréquence de travail 1 GHz, quelle est la longueur d'onde guidée du mode fondamental ?
1.4 Que doit-on connaître pour être certain d'utiliser ce câble en mode fondamental à la fréquence de travail choisie ?

Exercice 2 :
On considère un générateur d'impédance interne réelle Rg = 50Ω, qui alimente une charge d'impédance d'entrée Za = (65 + j 10) Ω par l'intermédiaire d'un câble d'impédance caractéristique réelle R_0= 75 Ω de longueur L (suivant l'axe x). Le câble est supposé sans pertes.
2.1 Quelle est la valeur du rapport d'onde stationnaire S sur le câble ?
2.2 Quelle est la proportion de la puissance incidente se propageant sur le câble qui n'est pas transmise à la charge (l'exprimer en pourcentage) ?
2.3 A partir de l'expression générale de la tension et du courant (fonction de Vi et Vr respectivement la tension incidente et réflechie en x=0) sur une ligne à constantes réparties, exprimer sous forme littérale la tension et le courant le long du câble, en fonction de β, L, R_o, V_i, et Γ_a (coefficient de réflexion de l'impédance d'entrée de l'antenne par rapport à l'impédance caractéristique du câble).

Exercice 3 :
On cherche à exprimer l'équation de dispersion associée aux modes TM se propageant dans une fibre optique d'indice de cœur n_1 et d'indice de gaine n_2. On vous rappelle quelques points généraux qui ont été démontrés en BE (cf. polycopié pour plus de détails):

$$E_{r_i} = -\frac{j}{\omega^2\mu_0\varepsilon_i - \beta^2}\left(\beta\frac{\partial E_{z_i}}{\partial r} + \frac{\omega\mu_0}{r}\frac{\partial H_{z_i}}{\partial \varphi}\right) \quad E_{\varphi_i} = \frac{j}{\omega^2\mu_0\varepsilon_i - \beta^2}\left(-\frac{\beta}{r}\frac{\partial E_{z_i}}{\partial \varphi} + \omega\mu_0\frac{\partial H_{z_i}}{\partial r}\right)$$

et

$$H_{r_i} = -\frac{j}{\omega^2\mu_0\varepsilon_i - \beta^2}\left(\beta\frac{\partial H_{z_i}}{\partial r} - \frac{\omega\varepsilon_i}{r}\frac{\partial E_{z_i}}{\partial \varphi}\right) \quad H_{\varphi_i} = \frac{j}{\omega^2\mu_0\varepsilon_i - \beta^2}\left(-\frac{\beta}{r}\frac{\partial H_{z_i}}{\partial \varphi} - \omega\varepsilon_i\frac{\partial E_{z_i}}{\partial r}\right)$$

On rappelle également que : $\chi_i^2 = \omega^2\varepsilon_i\mu_0 - \beta^2$ avec $\varepsilon_i = \varepsilon_0 n_i^2$

Les solutions de l'équation de propagation (méthode à séparation des variables) en faisant abstraction du terme $e^{j(\omega t - \beta z)}$ sont de la forme suivante :
$Ez(r,\varphi,z,t) = R(r)\cdot\phi(\varphi)\cdot e^{j(\omega t-\beta z)}$ et $Hz(r,\varphi,z,t) = R'(r)\cdot\phi'(\varphi)\cdot e^{j(\omega t-\beta z)}$

$$\begin{cases} Ez_1(r,\varphi) = A_1 J_\nu(u\frac{r}{a})\cdot\cos(\nu\varphi+\alpha) \\ Hz_1(r,\varphi) = A_1' J_\nu(u\frac{r}{a})\cdot\cos(\nu\varphi+\psi) \end{cases}$$ dans le cœur.

$$\begin{cases} Ez_2(r,\varphi) = A_2 K_\nu(w\frac{r}{a})\cdot\cos(\nu\varphi+\alpha) \\ Hz_2(r,\varphi) = A_2' K_\nu(w\frac{r}{a})\cdot\cos(\nu\varphi+\psi) \end{cases}$$ dans la gaine.

Avec J_ν et K_ν respectivement les fonctions de Bessel de première et seconde espèce d'ordre ν, ν un entier naturel, $u^2 = a^2\chi_1^2$, $w^2 = -a^2\chi_2^2$, a le rayon du cœur de la fibre

3.1 En coordonnées cylindriques, rappeler la relation définissant un mode TM et écrire les cinq relations de continuité vérifiées par **E** et **H**

3.2 En utilisant uniquement les relations de continuité faisant intervenir les composantes tangentielles de **E**, démontrer que les modes TM ne peuvent pas exister si $\nu \neq 0$.

3.3 En posant $\nu=0$, et en réécrivant les expressions des composantes longitudinales des champs, donner les relations de continuité tangentielles vérifiées par **E et H**.

3.4 Développer alors ces relations et en déduire la relation de dispersion vérifiée par les modes guidés TM.