INSTITUT NATIONAL DES TELECOMMUNICATIONS
GROUPE DES ECOLES DE TELECOMMUNICATION
CONTROLE DE CONNAISSANCES

Module PS 11 : Probabilités (1ère partie)
Durée : 1,5 H
Sans document et sans calculatrice (une page manuscrite A4 est autorisée)
Date : 6.12.2004
Coordonnateur : DELMAS Jean Pierre

Nom : Prénom :

Justifier chaque réponse de façon concise. Répondre sur le questionnaire même, si possible dans les limites qui vous sont proposées. Il est conseillé de faire un rapide brouillon sur une feuille à part avant de reporter votre réponse. Les trois exercices sont "indépendants".

1] **Fiabilité d'un système à deux composants**

Considérons deux composants 1 et 2 d'un système susceptibles d'être défaillants. A partir d'un instant initial $t = 0$, appelons X_1 et X_2, les variables aléatoires indépendantes représentant les durées de bon fonctionnement de ces composants de densités de probabilités respectives $f_{X_1}(x_1) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1}_{]0,+\infty[}(x_1)$ et $f_{X_2}(x_2) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 x_2} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x_2)$. A partir des composants 1 et 2, on réalise trois systèmes : Le système *série* qui tombe en panne si et seulement si au moins un des composants tombe en panne. Le système *parallèle* qui tombe en panne si et seulement si les deux composants tombent en panne. Le système *stand-by* pour lequel le composant 1 est mis en fonctionnement à l'instant $t = 0$ alors que le composant 2 est en attente puis dès que le composant 1 est défaillant, le composant 2 est mis en action, le système tombe en panne dès que le composant 2 tombe en panne.

1.1] Exprimer dans chacun des trois systèmes, la variable aléatoire $(Y_k)_{k=1,2,3}$ représentant la durée de bon fonctionnement pour les trois systèmes à l'aide des variables aléatoires X_1 et X_2.

1.2] Donner les expressions des trois densités de probabilité $f_{Y_1}(y_1)$, $f_{Y_2}(y_2)$ et $f_{Y_3}(y_3)$.

2] **Variable aléatoire mixte**

Le temps d'attente dans une file d'attente est modélisé par une variable aléatoire mixte de densité de probabilité :

$$f_X(x) = \frac{1}{3}\delta(x) + \frac{2}{3}\lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$$

2.1] Donner l'expression de la fonction de répartition $F_X(x)$ de la variable aléatoire X. En donner une représentation graphique. En quelle unité s'exprime λ ?

2.2] Donner la probabilité $P(0 \leq X < \frac{1}{\lambda})$.

3] **Variable aléatoire à deux dimensions**

Soient X_1 et X_2, deux variables aléatoires indépendantes de même densité de probabilité $f_X(x)$. On considère le changement de variable $Y_1 = X_1 + X_2$ et $Y_2 = X_1 - X_2$.

3.1] Donner l'expression de la densité de probabilité $f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2)$ de la variable aléatoire (Y_1, Y_2).

3.2] Préciser son expression pour la loi uniforme $f_X(x) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[-1,+1]}(x)$. Déduire de l'expression $f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2)$, les densités de probabilité $f_{Y_1}(y_1)$ et $f_{Y_2}(y_2)$. Les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont elles indépendantes dans ce cas ?

3.3] Même question dans le cas de la loi gaussienne de densité de probabilité $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

3.4] Retrouver les expressions des densités de probabilité $f_{Y_1}(y_1)$ et $f_{Y_2}(y_2)$ directement sans passer par l'intermédiaire de la densité de probabilité conjointe $f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)$ dans les deux cas particuliers précédents.

Correction très succincte du premier contrôle de connaissance de PS11

1] **Fiabilité d'un système à deux composants**

1.1] Dans le système *série* : $Y_1 = \text{Inf}(X_1, X_2)$
Dans le système *parallèle* : $Y_2 = \text{Sup}(X_1, X_2)$
Dans le système *stand-by* : $Y_3 = X_1 + X_2$.

1.2] $F_{Y_1}(y_1) = 1 - [1 - F_{X_1}(y_1)][1 - F_{X_2}(y_1)]$ d'après l'exo II.6 $\Rightarrow$
$f_{Y_1}(y_1) = f_{X_1}(y_1)[1 - F_{X_2}(y_1)] + f_{X_2}(y_1)[1 - F_{X_1}(y_1)]$.

$F_{Y_2}(y_2) = F_{X_1}(y_2)F_{X_2}(y_2)$ d'après l'exo II.6 $\Rightarrow$
$f_{Y_2}(y_2) = f_{X_1}(y_2)F_{X_2}(y_2) + f_{X_2}(y_2)F_{X_1}(y_2)$.

Puisque X_1 et X_2 sont indépendantes :
$f_{Y_3}(y_3) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x)f_{Y_2}(y_3 - x)dx$ d'après la rel [II.23].

Ce qui donne dans le cas de lois exponentielles pour lesquelles $F_{X_1}(x_1) = \left(1 - e^{-\lambda_1 x_1}\right) \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x_1)$ et $F_{X_2}(x_2) = \left(1 - e^{-\lambda_2 x_2}\right) \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x_2)$,

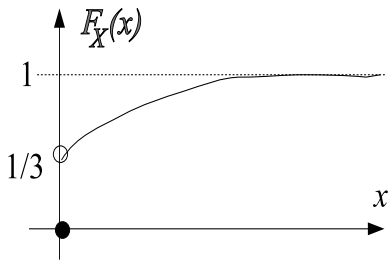
$$\begin{aligned}
f_{Y_1}(y_1) &= (\lambda_1 + \lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)y_1} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y_1) \\
f_{Y_2}(y_2) &= \left(\lambda_1 e^{-\lambda_1 y_2} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 y_2} - (\lambda_1 + \lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)y_2}\right) \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y_2) \\
f_{Y_3}(y_3) &= \left(\int_0^{y_3} \lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1 x} e^{-\lambda_2(y_3-x)} dx\right) \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y_3) \\
&= \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(e^{-\lambda_2 y_3} - e^{-\lambda_1 y_3}\right) \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y_3), \quad \text{si } \lambda_1 \neq \lambda_2 \\
&= \lambda^2 y_3 e^{-\lambda y_3} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y_3), \quad \text{si } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda
\end{aligned}$$

2] **Variable aléatoire mixte**

2.1]

$$F_X(x) = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}(1 - e^{-\lambda x})\right) \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$$

On rappelle que $\mathbb{1}_A(.)$ est la fonction indicatrice définie par $\mathbb{1}_A(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$.



Puisque λx est sans dimension, λ a la dimension de l'inverse d'un temps.

2.2]

$$P(0 \leq X < \frac{1}{\lambda}) = \frac{1}{3} + \int_0^{1/\lambda} f_X^c(x)dx = F_X(\frac{1}{\lambda}) - F_X(0)$$

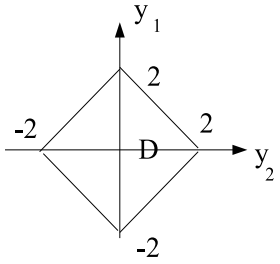
$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(1 - e^{-1}) = 1 - \frac{2}{3}e^{-1},$$

avec la notation $f_X(x) = f_X^d(x) + f_X^c(x)$ où $f_X^d(x) = \frac{1}{3}\delta(x)$ (partie discrète) et $f_X^c(x) = \frac{2}{3}\lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$ (partie continue).

3] **Variable aléatoire à deux dimensions**
3.1] D'après [21a].

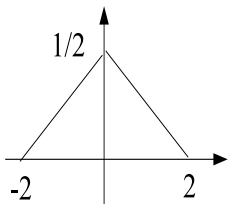
$$\begin{aligned} f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) &= \frac{1}{\left|\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right|} f_{X_1}(\frac{y_1+y_2}{2}) f_{X_2}(\frac{y_1-y_2}{2}) \\ &= \frac{1}{2} f_{X_1}(\frac{y_1+y_2}{2}) f_{X_2}(\frac{y_1-y_2}{2}) \end{aligned}$$

3.2] Dans le cas de la loi uniforme $f_X(x) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[-1,+1]}(x)$ et $\{-1 \leq \frac{y_1+y_2}{2} \leq +1\} \bigcup \{-1 \leq \frac{y_1-y_2}{2} \leq +1\} \Leftrightarrow (y_1,y_2) \in D$ avec D, le carré du plan (y_1,y_2) de sommets (2,0), (-2,0), (0,2) et (0,-2).
Par suite $f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = \frac{1}{8}\mathbb{1}_D(y_1,y_2)$.



Les variables aléatoires marginales Y_1 et Y_2 ont pour densités de probabilité (obtenue graphiquement) :

$$\begin{aligned} f_{Y_1}(y_1) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)dy_2 = \left(\frac{1}{8}\int_{-2+|y_1|}^{2-|y_1|} dy_2\right)\mathbb{1}_{[-2,+2]}(y_1) = \frac{1}{4}(2-|y_1|)\mathbb{1}_{[-2,+2]}(y_1) \\ f_{Y_2}(y_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)dy_1 = \frac{1}{4}(2-|y_2|)\mathbb{1}_{[-2,+2]}(y_2) \end{aligned}$$



Puisque $f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) \neq f_{Y_1}(y_1)f_{Y_2}(y_2)$, les variables aléatoires Y_1 et Y_2 ne sont pas indépendantes.
3.3] Dans le cas de la loi gaussienne de densité de probabilité $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, nous avons : $f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}e^{-(\frac{y_1^2}{4}+\frac{y_2^2}{4})}$, les variables aléatoires marginales Y_1 et Y_2 ont pour densités de probabilité :

$$\begin{aligned} f_{Y_1}(y_1) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)dy_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y_1^2}{2(\sqrt{2})^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y_2^2}{2(\sqrt{2})^2}}dy_2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-2\frac{y_1^2}{2}} \text{ densité de probabilité gaussienne } \mathcal{N}(0,2) \\ f_{Y_2}(y_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)dy_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y_2^2}{2(\sqrt{2})^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y_1^2}{2(\sqrt{2})^2}}dy_1 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y_2^2}{4}} \quad \text{densité de probabilité gaussienne } \mathcal{N}(0,2)$$

Puisque $f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = f_{Y_1}(y_1)f_{Y_2}(y_2)$, les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont indépendantes.
3.4] Puisque les variables aléatoires $-X_2$ et X_2 ont même densité de probabilité (fonction paire), on obtient en utilisant [II23a] :

$$\begin{aligned} f_{Y_1}(y_1) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x)f_{X_2}(y_1-x)dx \\ f_{Y_2}(y_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x)f_{X_2}(y_2-x)dx \end{aligned}$$

Les variables aléatoires Y_1 et Y_2 ont donc même densité de probabilité $f_Y(y)$. Soit respectivement dans les cas uniforme et gaussien :

$$f_Y(y) = \frac{1}{4}(2-|y|)\mathbb{1}_{[-2,+2]}(y)$$

$$= \int_{-\infty}^{-\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-x)^2}{2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\frac{y}{2})^2}{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}}_{\text{densité de probabilité } \mathcal{N}(\frac{y}{2},\frac{1}{2})} dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{4}} \times 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{4}}$$