INSTITUT NATIONAL DES TELECOMMUNICATIONS
GROUPE DES ECOLES DE TELECOMMUNICATION
CONTROLE DE CONNAISSANCES

Module PS 11 : Probabilités (1ère session)
Durée : 1,5 H
Sans document et sans calculatrice (seule une page manuscrite A4 est autorisée)
Date : 24.11.2006
Coordonnateur : DELMAS Jean Pierre

Nom : Prénom : Année :

Justifier chaque réponse de façon concise. Répondre sur le questionnaire même, si possible dans les limites qui vous sont proposées. Il est conseillé de faire un rapide brouillon sur une feuille à part avant de reporter votre réponse. Les trois exercices sont "indépendants".

1] **Modélisation d'expérience aléatoire : Compteur de particules inhibé**

Deux émetteurs de particules émettent chacun une particule pendant l'intervalle de temps $[0, t_0]$. On note T_1 et T_2, les instants respectifs d'émission des deux particules émises. Le compteur qui reçoit une particule à l'instant t est inhibé pendant l'intervalle de temps $[t, t+\tau]$ (ne compte plus aucune particule reçue pendant cette durée d'inhibition τ, τ étant une constante qui ne dépend que du compteur et $\tau < t_0$). On suppose que les deux particules sont émises "de façon indépendante" et "au hasard" vers le compteur.
1.1] Par quel espace probabilisé peut-on modéliser une telle expérience aléatoire ? Quel est l'événement {une particule n'est pas enregistrée} dans cet espace probabilisé ?
1.2] En déduire la probabilité qu'une particule ne soit pas enregistrée ?

2] **Probabilité d'événement, variable aléatoire**

La durée de vie X de chaque transistor qui équipe un étage d'un oscilloscope est modélisée par une variable aléatoire de densité de probabilité :

$$f_X(x) = \frac{a}{x^2} \mathbb{1}_{]a,\infty[}(x)$$

avec $a = 100$h et l'état de chacun des transistors qui équipe cet étage est indépendant de l'état des autres.

Quelle est la probabilité qu'aucun des 5 transistors qui équipe cet étage d'oscilloscope ne soit à remplacer durant les 250 premières heures de fonctionnement de l'appareil ?

3] **Changement de variable aléatoire**

On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes de même loi de probabilité de densité de probabilité :

$$f_{X_1}(x) = f_{X_2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

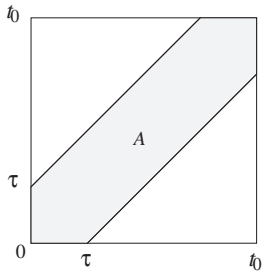
3.1] Déterminer la densité de probabilité de la variable aléatoire $Y \stackrel{\text{def}}{=} X_1^2$.

3.2] Déterminer la densité de probabilité de la variable aléatoire $Z \stackrel{\text{def}}{=} X_1^2 + X_2^2$. Préciser la loi de probabilité obtenue.

Correction succincte du contrôle de connaissance de PS11

1] **Modélisation d'expérience aléatoire : Compteur de particules inhibé**

1.1] L'expérience aléatoire est modélisée par l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ avec $\Omega = [0, t_0] \times [0, t_0]$, $\mathcal{A}$ désigne l'ensemble des parties de Ω dont on sait définir des "surfaces" (les boréliens de Ω) et P est l'application probabilité uniforme sur Ω.



1.2] L'événement {une particule n'est pas enregistrée} est alors le domaine A hachuré de Ω. Par suite

$$P(A) = \frac{\text{Aire}(A)}{\text{Aire}(\Omega)} = \frac{t_0^2 - (t_0 - \tau)^2}{t_0^2} = \frac{2t_0\tau - \tau^2}{t_0^2} \approx \frac{2\tau}{t_0} \quad \text{pour } \tau \ll t_0$$

2] **Probabilité d'événement, variable aléatoire**

Désignons par $X_k, k = 1.., 5$, les durées de vie de chacun des 5 transistors. L'événement cherché est alors

$$\{\bigcap_{k=1}^{5} X_k > 250\}.$$

Par suite la probabilité cherchée P vaut grace à l'indépendance des variables aléatoires $X_k, k = 1.., 5$:

$$P = P(\bigcap_{k=1}^{5}\{X_k > 250\}) = \prod_{k=1}^{5} P(X_k > 250) = \left(\int_{250}^{+\infty} f_X(x)dx\right)^5 = \left(\int_{250}^{+\infty} \frac{a}{x^2}dx\right)^5 = \left(\frac{100}{250}\right)^5 \approx 0.01$$

3] **Changement de variable aléatoire**

3.1]

$$F_Y \stackrel{\text{def}}{=} P(Y < y) = P(X_1^2 < y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ P(\sqrt{y} < X_1 < \sqrt{y}) & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

avec $P(\sqrt{y} < X_1 < \sqrt{y}) = 2\int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$. Soit :

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{y}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{y}} .\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y)$$

3.2] Deux méthodes sont possibles: La première passe par la fonction de répartition de la variable aléatoire Z et la deuxième calcule directement le densité de probabilité de la variable aléatoire Z à l'aide du produit de convolution (rel. [II.23a]) des densités de probabilité de X_1^2 et X_2^2 obtenues à la question 3.1] car X_1^2 et X_2^2 sont indépendantes.

$$F_Z \stackrel{\text{def}}{=} P(Z < z) = P(X_1^2 + X_2^2 < z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \leq 0 \\ P[(X_1, X_2) \in \Delta_z] & \text{si } z > 0 \end{cases}$$

avec $\Delta_z \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, x_2),\ x_1^2 + x_2^2 < z\}$. Soit grâce à l'indépendance des variables aléatoires X_1 et X_2

$$
\begin{aligned}
P[(X_1, X_2) \in \Delta_z] &= \iint_{\Delta_z} f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \iint_{\Delta_z} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) dx_1 dx_2 \\
&= \iint_{\Delta_z} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2\sigma^2}} dx_1 dx_2 = \iint_{\Delta'_z} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} r dr d\theta = \left[-e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\right]_0^{\sqrt{z}} = 1 - e^{-\frac{z}{2\sigma^2}}.
\end{aligned}
$$

avec $\Delta'_z \stackrel{\text{def}}{=} \{(r, \theta),\ r > 0 \text{ et } \theta \in [0, 2\pi[\}$

Soit :

$$
f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{z}{2\sigma^2}} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(z).
$$

Par suite Z est de loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2\sigma^2}$.

Ce résultat peut s'obtenir directement moyennant un petit calcul d'intégrale :

$$
f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) f_Y(z-y) dy = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^z \frac{1}{\sqrt{y(z-y)}} e^{-\frac{z}{2\sigma^2}} dy \right) \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(z)
$$

avec

$$
\int_0^z \frac{1}{\sqrt{y(z-y)}} dy = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{2 \sin u \cos u}{\sin u \cos u} du = \pi \qquad (\text{avec } t = \sin^2 u)
$$

Ce qui redonne $f_Z(z) = \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{z}{2\sigma^2}} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(z)$.