# INSTITUT NATIONAL DES TELECOMMUNICATIONS
# GROUPE DES ECOLES DE TELECOMMUNICATION
# CONTROLE DE CONNAISSANCES

---

Module PS 11 : Probabilités (1ère partie)
Durée : 1,5 H
Sans document et sans calculatrice (une page manuscrite A4 est autorisée)
Date : 16.11.2007
Coordonnateur : DELMAS Jean Pierre

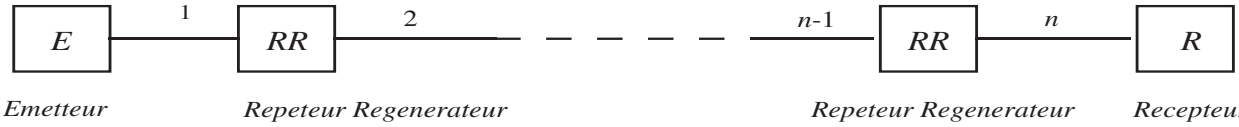
Nom : Prénom : Année (1 ou 2):

---

Justifier chaque réponse de façon concise. Répondre sur le questionnaire même, *si possible dans les limites qui vous sont proposées*. Il est conseillé de faire un rapide brouillon sur une feuille à part avant de reporter votre réponse. Les deux exercices sont "indépendants".

1] **Probabilité cumulée d'erreur**

On considère une transmission numérique sur fibre optique transatlantique constituée de $n$ tronçons.




Considérons la transmission d'une information binaire (bit). Ce bit est transmis sur le canal de transmission avec une probabilité d'erreur $p$ sur chacun des $n$ tronçons. Les erreurs sont indépendantes entre les tronçons. Chaque répéteur régénérateur détecte l'information binaire et la retransmet sur le tronçon suivant.

1.1] Exprimer la probabilité d'erreur globale dans les cas particuliers $n = 2, 3$. Puis en donner une expression générale $P_n$(erreur) en fonction de $n$ et $p$, (on pourra distinguer le cas $n$ pair et $n$ impair).

1.2] Pour obtenir une expression générale plus lisible, après avoir exprimé l'événement {erreur globale sur $n$ tronçons} à l'aide de l'événement {erreur globale sur $n-1$ tronçons}, calculer $P_n$(erreur) en fonction de $P_{n-1}$(erreur) et de $p$. En déduire une formule analytique donnant $P_n$(erreur) en fonction de $n$ et $p$, (on pourra utiliser la propriété $u_n = a + bu_{n-1} \Rightarrow \left(u_n - \frac{a}{1-b}\right) = b\left(u_{n-1} - \frac{a}{1-b}\right)$). Quelle est la limite de $P_n$(erreur) pour $n \to \infty$. Interprétation.

2] **Changement de variable aléatoire**

Soient $U_1$ et $U_2$, deux variables aléatoires indépendantes et de loi de probabilité uniforme sur $]0, 1]$ et $a_1$ et $a_2$, deux constantes strictement positives. On considère les trois variables aléatoires $X$, $Y$ et $Z$ définies par

$$X = -\frac{1}{a_1}\ln(U_1), \quad Y = -\frac{1}{a_2}\ln(U_2) \quad \text{et} \quad Z = -\frac{1}{a_1}\ln(U_1) - \frac{1}{a_2}\ln(U_2).$$

où ln(.) désigne le logarithme népérien.

2.1] Déterminer la fonction de répartition $F_X(x)$, puis la densité de probabilité $f_X(x)$ de la variable aléatoire $X$.

2.2] Retrouver directement $f_X(x)$ à l'aide de la formule du changement de variable bijectif.

2.3] En déduire la densité de probabilité $f_{X,Y}(x, y)$ du couple de variable aléatoire $(X, Y)$, puis calculer $P(X > Y)$. Interprétation ?

2.4] En observant que $Z = X + Y$, déterminer directement la densité de probabilité $f_Z(z)$

2.5] Dans le cas particulier où $a_1 = a_2 = a$, déterminer directement la fonction de répartition $F_Z(z)$, puis la densité de probabilité $f_Z(z)$ de la variable aléatoire $Z$.

2.6] Dans le cas général $a_1 > 0$ et $a_2 > 0$, déterminer la densité de probabilité $f_{X,Z}(x,z)$ du couple de variable aléatoire $(X,Z)$ à l'aide de la formule du changement de variable bijectif.
2.7] En déduire à nouveau $f_Z(z)$ (on distinguera les cas $a_1 = a_2$ et $a_1 \neq a_2$).

---

**Correction très succincte du premier contrôle de connaissance de PS11**
1] **Probabilité cumulée d'erreur**
1.1] Puisque {erreur globale sur 2 tronçons}={une seule erreur sur 2 tronçons}, $P_2(\text{erreur}) = 2p(1-p)$ ; {erreur globale sur 3 tronçons}={une seule ou trois erreurs sur 3 tronçons}, $P_3(\text{erreur}) = 3p(1-p)^2 + p^3$. Dans le cas général :

{erreur globale sur $n$ tronçons}={un nombre impair d'erreurs sur $n$ tronçons}, par suite

$$P_n(\text{erreur}) = \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{k=0}^{(n-1)/2} \mathrm{C}_n^{2k+1} p^{2k+1}(1-p)^{n-(2k+1)} & n \text{ impair} \\ \sum_{k=0}^{(n/2)-1} \mathrm{C}_n^{2k+1} p^{2k+1}(1-p)^{n-(2k+1)} & n \text{ pair} \end{array} \right.$$

1.2] En notant $E_n$={erreur globale sur $n$ tronçons} et $E$={erreur sur le tronçon $n$}, nous avons

$$E_n = \left(E_{n-1} \cap \bar{E}\right) \cup \left(\bar{E}_{n-1} \cap E\right).$$

Puisque qu'il s'agit d'une union de deux événements incompatibles et que les erreurs sur différents canaux sont indépendantes

$$P_n(\text{erreur}) = (1-p)P_{n-1}(\text{erreur}) + p(1 - P_{n-1}(\text{erreur}))$$

D'ou la relation de récurrence $P_n(\text{erreur}) = p + (1-2p)P_{n-1}(\text{erreur})$. Par suite : $\left(P_n(\text{erreur}) - \frac{1}{2}\right) = (1-2p)\left(P_{n-1}(\text{erreur}) - \frac{1}{2}\right)$, soit $P_n(\text{erreur}) = \frac{1}{2} + (1-2p)^{n-1}\left(P_1(\text{erreur}) - \frac{1}{2}\right)$ et avec $P_1(\text{erreur}) = p$, on obtient

$$P_n(\text{erreur}) = \frac{1}{2}\left(1 - (1-2p)^n\right).$$

Il s'agit naturellement d'une fonction décroissante de $p$ qui tend vers $\frac{1}{2}$ quand le nombre $n$ de tronçons tend vers $\infty$ : la pire des situations où le récepteur joue à pile ou face ! Remarquons que l'approximation $P_n(\text{erreur}) \approx np$ n'est valide que si $np \ll 1$.

2] **Changement de variable aléatoire**
2.1]

$$F_X(x) \stackrel{\text{def}}{=} P(X < x) = P\left(-\frac{1}{a_1}\ln(U_1) < x\right) = P(U_1 > e^{-a_1 x}) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 - e^{-a_1 x} & \text{si } x \geq 0 \\ P(\emptyset) = 0 & \text{si } x < 0 \end{array} \right. .$$

Par suite $f_X(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dF_X(x)}{dx} = a_1 e^{-a_1 x} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$. Soit une loi de probabilité exponentielle de paramètre $a_1$.
2.2] Le changement de variable $U_1 \in ]0,1] \longmapsto X \in [0,+\infty[$ est bijectif monotone décroissant. Par suite

$$f_X(x) = \frac{1}{|\frac{dx}{du_1}|} f_{U_1}(u_1)_{|u_1 = e^{-a_1 x}} = a_1 e^{-a_1 x} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x),$$

car $\frac{dx}{du_1} = -\frac{1}{a_1 u_1} = -\frac{1}{a_1 e^{-a_1 x}}$ et $f_{U_1}(u_1) = \mathbb{1}_{]0,1]}(u_1)$.
2.3] Puisque les variables aléatoires $U_1$ et $U_2$ sont indépendantes, $X$ et $Y$ fonctions chacune de variables aléatoires indépendantes sont indépendantes. Par suite

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = a_1 a_2 e^{-(a_1 x + a_2 y)} \mathbb{1}_{]0,+\infty[\times]0,+\infty[}(x,y).$$

$$
\begin{aligned}
P(X>Y) &= \iint_{x>y} f_{X,Y}(x,y)dxdy \\
&= \int_0^{+\infty}\left[\int_0^x a_1a_2e^{-(a_1x+a_2y)}dy\right]dx = \int_0^{+\infty} a_1e^{-a_1x}\left[\int_0^x a_2e^{-a_2y}dy\right]dx \\
&= 1-\int_0^{+\infty} a_1e^{-(a_1+a_2)x}dx = \frac{a_2}{a_1+a_2}\begin{cases} =1/2 & \text{si } a_1=a_2 \\ <1/2 & \text{si } a_1>a_2 \\ >1/2 & \text{si } a_1<a_2 \end{cases}.
\end{aligned}
$$

Ce dernier résultat s'interprète : pour $a_1 = a_2$, les variables aléatoires $X$ et $Y$ de même loi de probabilité et indépendantes ont chacune même chance d'être plus grande que l'autre. Pour $a_1 > a_2$, la variable aléatoire $X$ est plus concentrée vers l'origine que la variable aléatoire $Y$, donc a moins de chance d'être plus petite et $P(X > Y) < 1/2$.

2.4] Puisque les variables aléatoires $X$ et $Y$ sont indépendantes, la densité de probabilité $f_Z(z)$ est le produit de convolution des densités de probabilité $f_X(z)$ et $f_Y(z)$, soit

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)f_Y(z-t)dt = \int_0^z a_1a_2e^{-a_1t}e^{-a_2(z-t)}dt \\
&= a_2e^{-a_2z}\int_0^z a_1e^{-(a_1-a_2)t}dt = \begin{cases} a^2ze^{-az}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(z) & \text{si } a_1=a_2=a \\ \frac{a_1a_2}{a_1-a_2}\left(e^{-a_2z}-e^{-a_1z}\right)\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(z) & \text{si } a_1\neq a_2 \end{cases}.
\end{aligned}
$$

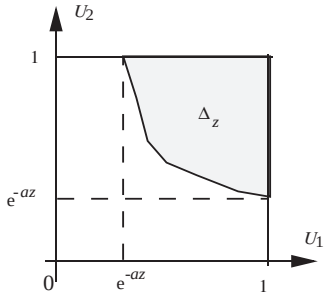
2.5]

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &\overset{\text{def}}{=} P(Z<z) = P\left(-\frac{1}{a}\ln(U_1)-\frac{1}{a}\ln(U_2)<z\right) = P(U_1U_2>e^{-az}) \\
&= \begin{cases} \iint_{\Delta_z} f_{U_1,U_2}(u_1,u_2)du_1du_2 = \iint_{\Delta_z} du_1du_2 & \text{si } z\geq 0 \\ P(\emptyset)=0 & \text{si } z<0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

car

$$
\begin{aligned}
f_{U_1,U_2}(u_1,u_2) &= f_{U_1}(u_1)f_{U_2}(u_2) \\
&= \mathbb{1}_{]0,1]\times]0,1]}(u_1,u_2)
\end{aligned}
$$

(loi uniforme sur le carré $]0,1]\times]0,1]$).
avec $\Delta_z \overset{\text{def}}{=} \{(u_1,u_2)$ tel que $0<u_1\leq 1; 0<u_2\leq 1$ et $u_1u_2>e^{-az})\}$.




On obtient géométriquement par un calcul de surface pour $z \geq 0$

$$
\iint_{\Delta_z} du_1du_2 = 1-\left(e^{-az}+\int_{e^{-az}}^1 \frac{e^{-az}}{u}du\right) = 1-\left(e^{-az}\left(1+\left(\ln 1-\ln e^{-az}\right)\right)\right) = 1-e^{-az}(1+az).
$$

Soit

$$
F_Z(z) = \left(1-e^{-az}(1+az)\right)\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(z) \quad \text{et} \quad f_Z(z) \overset{\text{def}}{=} \frac{dF_Z(z)}{dz} = a^2ze^{-az}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(z).
$$

2.6] Puisque le changement de variable aléatoire $(U_1,U_2) \in ]0,1]\times]0,1] \longmapsto (X,Z) \in \Delta$ est bijectif avec $\Delta \overset{\text{def}}{=} \{(x,z)$ tel que $0<e^{-a_1x}\leq 1$ et $0<e^{-a_2(z-x)}\leq 1\} = \{(x,z)$ tel que $x>0$ et $z-x>0\}$. Par suite la formule du changement de variable bijectif donne :

$$
f_{X,Z}(x,z) = \frac{1}{\left|\text{Det}\begin{pmatrix} \frac{dx}{du_1} & \frac{dx}{du_2} \\ \frac{dz}{du_1} & \frac{dz}{du_2} \end{pmatrix}\right|} f_{U_1,U_2}(u_1,u_2)\big|_{u_1=e^{-a_1x},u_2=e^{-a_2(z-x)}}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\left|\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -1/a_1u_1 & 0 \\ -1/a_1u_1 & -1/a_2u_2 \end{pmatrix}\right|}\Big|_{u_1=e^{-a_1x},u_2=e^{-a_2(z-x)}} 1_\Delta(x,z) \\
&= a_1a_2e^{-a_1x}e^{-a_2(z-x)}\mathbb{1}_\Delta(x,z).
\end{aligned}
$$

2.7] La densité de probabilité $f_Z(z)$ de la variable aléatoire marginale $Z$ issue du couple $(X,Z)$ est donnée par :

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Z}(x,z)dx = \int_0^z a_1a_2e^{-a_1x}e^{-a_2(z-x)}dx \\
&= a_2e^{-a_2z}\int_0^z a_1e^{-(a_1-a_2)x}dx = \begin{cases} a^2ze^{-az}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(z) & \text{si } a_1=a_2=a \\ \frac{a_1a_2}{a_1-a_2}\left(e^{-a_2z}-e^{-a_1z}\right)\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(z) & \text{si } a_1\neq a_2 \end{cases}.
\end{aligned}
$$