TELECOM et Management SudParis
Institut TELECOM
CONTROLE DE CONNAISSANCES

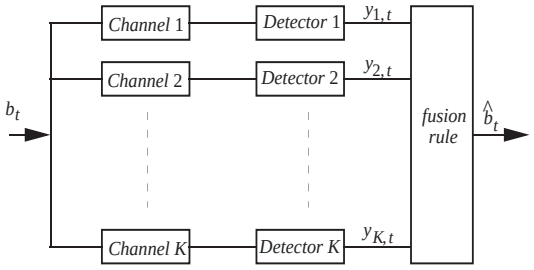
Module MAT3002 : Probabilités (premier partiel)
Durée : 1,5 H
Sans document et sans calculatrice (une page manuscrite A4 est autorisée)
Date : 25 Novembre 2008
Coordonnateur : DELMAS Jean Pierre

Nom : Prénom : Année (1,2,3)

Justifier chaque réponse de façon concise. Répondre sur le questionnaire même dans les limites qui vous sont proposées. Il est conseillé de faire un rapide brouillon sur une feuille à part avant de reporter votre réponse. Les quatre exercices sont indépendants.

1] **Probabilité d'erreur**

Considérons la transmission d'un élément binaire $B \in \{0,1\}$ qui est transmis à un récepteur par l'intermédiaire de K canaux binaires indépendants de probabilités d'erreur identiques p. Le récepteur détecte l'élément binaire $\widehat{B} \in \{0,1\}$ selon la règle majoritaire parmi les K éléments binaires reçus $Y_1, Y_2, ..., Y_K$. Calculer la probabilité d'erreur d'un tel récepteur pour $K = 2$, $K = 3$ puis pour K impair et K pair quelconques (pour K pair si le nombre d'éléments binaires 0 et 1 sont égaux parmi les K éléments binaires reçus $Y_1, Y_2, ..., Y_K$, le récepteur décide au hasard parmi 0 ou 1).



2] **Loi uniforme**

On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes de loi de probabilité respectivement uniforme sur $[0, a_1]$ et uniforme sur $[0, a_2]$.

2.1] Donner la densité de probabilité de la variable aléatoire (X_1, X_2).

2.2] Quelle est la probabilité $P(X_1 > X_2)$? (on pourra distinguer les cas $a_1 \leq a_2$ et $a_1 \geq a_2$. Commentaires ?

3] **Lois marginales et indépendance**

Soient (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) deux couples de variables aléatoires de densités de probabilité respectives :

$$f_{X_1,Y_1}(x,y) = (x+y)\mathbb{1}_{[0,1]\times[0,1]}(x,y) \quad \text{et} \quad f_{X_2,Y_2}(x,y) = (x+\frac{1}{2})(y+\frac{1}{2})\mathbb{1}_{[0,1]\times[0,1]}(x,y).$$

3.1] Donner les expressions des densités de probabilité des variables aléatoires X_1, Y_1, X_2 et Y_2.

3.2] Que peut on dire de l'indépendance de X_1 et Y_1 puis de X_2 et Y_2 ? Commentaires ?

4] **Produit de variables aléatoires**

Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes. X est continue de densité de probabilité exponentielle ($f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{]0,\infty[}(x)$) et Y discrète avec $P(Y=+1) = p$ et $P(Y=-1) = 1-p$ où $\lambda > 0$ et $p \in [0,1]$.

4.1] Calculer la fonction de répartition, puis la densité de probabilité de la variable aléatoire $Z = XY$

4.2] Interpréter le cas particulier $p = \frac{1}{2}$

Correction très succincte du contrôle de connaissance de MAT3002 premier partiel

1] **Probabilité d'erreur**

Pour $K = 2$:

{erreur} = {erreur sur deux canaux} $\cup$ {erreur sur un seul canal $\cap$ malchance au tirage au hasard}. Et l'événement {erreur sur un seul canal $\cap$ malchance au tirage au hasard} est l'union des deux événements incompatibles {une erreur seule sur le premier canal $\cap$ malchance au tirage au hasard} et {une erreur seule sur le deuxième canal $\cap$ malchance au tirage au hasard}. Chacun de ces événement étant une intersection de deux événements indépendants (les erreurs sur les canaux sont indépendantes). Par suite :

$$P(\text{erreur}) = p^2 + 2p(1-p)\frac{1}{2} = p.$$

Pour $K = 3$: {erreur} = {erreur sur trois canaux} $\cup$ {erreur sur seulement deux canaux},
ce dernier événement se décompose en l'union de 3 événements incompatibles selon le choix du canal sans erreur. Par suite :

$$P(\text{erreur}) = p^3 + 3p^2(1-p).$$

Puis pour K impair quelconque : {erreur} $= \bigcup_{k=\frac{K+1}{2}}^{K}$ {erreur sur exactement k canaux}.

Par suite : $P(\text{erreur}) = \sum_{k=\frac{K+1}{2}}^{K} C_K^k p^k (1-p)^{K-k}$.

Enfin pour K pair quelconque

{erreur} $= \bigcup_{k=\frac{K}{2}+1}^{K}$ {erreur sur exactement k canaux} $\cup$ {erreur sur exactement $K/2$ canaux $\cap$ malchance au tirage au hasard}.

Par suite : $P(\text{erreur}) = \sum_{k=\frac{K}{2}+1}^{K} C_K^k p^k (1-p)^{K-k} + \frac{1}{2} C_K^{K/2} p^{K/2} (1-p)^{K/2}$.

2] **Loi uniforme**

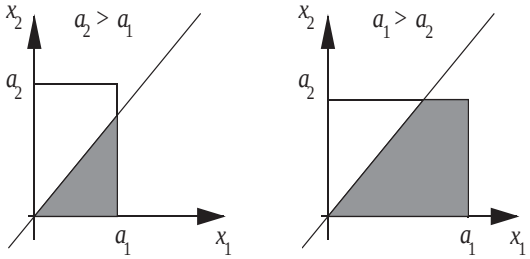
2.1] D'après l'indépendance des variables aléatoires X_1 et X_2, $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)$ et d'après la définition de la loi uniforme $f_{X_1}(x) = \frac{1}{a_1}\mathbb{1}_{[0,a_1]}(x)$ et $f_{X_2}(x) = \frac{1}{a_2}\mathbb{1}_{[0,a_2]}(x)$. Par suite

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{a_1 a_2}\mathbb{1}_{[0,a_1[\times[0,a_2[}(x_1,x_2).$$

2.2] La probabilité $P(X_1 > X_2)$ est donnée par

$$P(X_1 > X_2) = \int\int_{\Delta} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)dx_1 dx_2$$

avec $\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1,x_2)$ tel que $x_1 > x_2\}$. En distinguant les cas $a_1 \leq a_2$ et $a_1 \geq a_2$, on obtient géométriquement :



$$P(X_1 > X_2) = \begin{cases} \frac{1}{a_1 a_2}\frac{a_1^2}{2} = \frac{a_1}{2a_2} & a_1 \leq a_2 \\ \frac{1}{a_1 a_2}[a_1 a_2 - \frac{a_2^2}{2}] = 1 - \frac{a_2}{2a_1} & a_1 \geq a_2 \end{cases}$$

On remarque que pour $a_1 = a_2$, les variables aléatoires X_1 et X_2 ont même loi de probabilité et donc que $P(X_1 > X_2) = \frac{1}{2}$ par symétrie et puisque $P(X_1 = X_2) = 0$ (variable aléatoires continues). Pour $a_1 \leq a_2$, X_1 est plus concentrée vers 0 que X_2 et donc $P(X_1 > X_2) \leq \frac{1}{2}$. Au contraire pour $a_1 \geq a_2$, X_2 est plus concentrée vers 0 que X_1 et donc $P(X_1 > X_2) \geq \frac{1}{2}$.

3] **Lois marginales et indépendance**

3.1] Les densités de probabilité des variables aléatoires marginales X_1 et X_2 sont obtenues par :

$$\begin{aligned} f_{X_1}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1,Y_1}(x,y)dy = \left(\int_0^1 (x+y)dy\right)\mathbb{1}_{[0,1]}(x) = (x+\frac{1}{2})\mathbb{1}_{[0,1]}(x) \\ f_{X_2}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_2,Y_2}(x,y)dy = (x+\frac{1}{2})\left(\int_0^1 (y+\frac{1}{2})dy\right)\mathbb{1}_{[0,1]}(x) = (x+\frac{1}{2})\mathbb{1}_{[0,1]}(x), \end{aligned}$$

et par symétrie $f_{Y_1}(y) = (y+\frac{1}{2})\mathbb{1}_{[0,1]}(y)$ et $f_{Y_2}(y) = (y+\frac{1}{2})\mathbb{1}_{[0,1]}(y)$.

3.2] Par suite puisque $f_{X_1,Y_1}(x,y) \neq f_{X_1}(x)f_{Y_1}(y)$ et $f_{X_2,Y_2}(x,y) = f_{X_2}(x)f_{Y_2}(y)$, les variables aléatoires X_1 et Y_1 ne sont pas indépendantes, par contre X_2 et Y_2 sont variables aléatoires indépendantes. Nous remarquons ainsi que les lois de probabilités des variables aléatoires marginales ne caractérisent pas la loi de probabilité du couple.

4] **Produit de variables aléatoires**

4.1]

$$\begin{aligned} F_Z(z) &\overset{\text{def}}{=} P(Z < z) = P\left[((Z < z) \cap (Y = +1)) \cup ((Z < z) \cap (Y = -1))\right] \\ &= P\left((Z < z) \cap (Y = +1)\right) + P\left((Z < z) \cap (Y = -1)\right) \\ &= P\left((XY < z) \cap Y = +1)\right) + P\left((XY < z) \cap (Y = -1)\right) \\ &= P\left((X < z) \cap (Y = +1)\right) + P\left((-Y < z) \cap (Y = -1)\right) \\ &= P(X < z)P(Y = +1) + P(Y > -z)P(Y = -1) = pF_X(z) + (1-p)(1 - F_X(-z)) \end{aligned}$$

et par dérivation :

$$f_Z(z) = pf_X(z) + (1-p)f_X(-z) = p\lambda e^{-\lambda z}\mathbb{1}_{]0,\infty[}(z) + (1-p)\lambda e^{\lambda z}\mathbb{1}_{]-\infty,0[}(z)$$

4.2] Dans le cas particulier $p = \frac{1}{2}$, $f_Z(z) = \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|z|}$ qui est une fonction paire.