CORRIGÉ DE L'EXAMEN DU 7/12/01

EXERCICE 1

1. Le nombre de mains constituées de deux cartes est $C_{32}^2 = \frac{32!}{30!2!} = 16 \times 31 = 496$. Ainsi, on peut modéliser l'absence de connaissance de la main choisie par une variable aléatoire **X** à 496 valeurs. Comme chaque carte a la même probabilité d'être extraite, chacune des 496 mains a la même probabilité d'avoir été choisie, et **X** possède une loi uniforme sur 496 valeurs. L'incertitude moyenne sur la détermination de la main est l'entropie de **X** qui vaut :

$$\boxed{H(X) = \log_2 496 \approx 8{,}9542 \text{ bits}}$$

2. La réponse de A à la première question de B peut être modélisée par une variable aléatoire Y_1 à trois valeurs car il y a trois réponses possibles (0, 1, 2). On notera :

$$Y_1 = j \quad \Leftrightarrow \quad \{\text{la main contient j coeurs}\}$$

L'information moyenne apportée par Y_1 sur **X** s'écrit :

$$I_{Y_1 \to X} = I(Y_1; X) = H(Y_1) - H(Y_1 / X)$$

Or, la connaissance de **X** entraîne celle de Y_1, donc $H(Y_1 / X) = 0$ et par conséquent :

$$\boxed{I_{Y_1 \to X} = H(Y_1)}$$

Il suffit donc de calculer la loi de probabilité de Y_1.

Toutes les mains étant équiprobables, il suffit de dénombrer les cas favorables et les cas possibles. Le nombre de cas possibles a été évalué à la question précédente : $C_{32}^2 = 496$. On a alors :

$$P\{Y_1 = 0\} = \frac{C_{24}^2}{C_{32}^2} = \frac{276}{496}$$

$$P\{Y_1 = 1\} = \frac{C_8^1 \times C_{24}^1}{C_{32}^2} = \frac{192}{496}$$

$$P\{Y_1 = 2\} = \frac{C_8^2}{C_{32}^2} = \frac{28}{496}$$

Le calcul de l'entropie s'en déduit directement :

$$H(Y_1) = -\sum_{j=0}^{2} P\{Y_1 = j\} \times \log_2\left(P\{Y_1 = j\}\right) \approx 1{,}2347 \text{ bit}$$

L'information moyenne apportée par la première réponse de A sur la main à découvrir est donc de **1,2347 bit**.

3. La réponse fournie par A à la seconde question de B peut être modélisée par une variable aléatoire Y_2 à deux valeurs.

$$\{Y_2 = 1 \text{ (resp 0)}\} = \{\text{La main contient au moins un roi (resp n'en contient pas)}\}$$

L'information moyenne apportée par les deux réponses de A sur la détermination de la main s'écrit :

$$I_{(Y_1,Y_2)\to X} = I((Y_1,Y_2);X) = H(Y_1,Y_2) - H((Y_1,Y_2)/X)$$

Or, la connaissance de X entraîne celle de Y_1 et de Y_2, donc $H((Y_1,Y_2)/X) = 0$ et par conséquent $I_{(Y_1,Y_2)\to X} = H(Y_1,Y_2) = H(Y_1) + H(Y_2/Y_1)$

Le calcul de $H(Y_1)$ a été effectué à la question précédente, donc il suffit d'évaluer $H(Y_2/Y_1)$. Pour ce faire, calculons la loi de Y_2 sachant Y_1.

Si $Y_1 = 0$, la main ne comporte aucun cœur. On a vu que 276 mains obéissaient à ce critère. Dans ce cas, évaluer la probabilité que Y_2 prenne la valeur 0 revient à dénombrer, parmi les 276 mains possibles, celles qui ne comportent pas de roi. Le nombre de cas favorables correspond alors au nombre de couples de cartes choisies parmi l'ensemble des cartes auquel on a soustrait les cœurs et les rois $(32-8-3=21)$, c'est-à-dire $C_{21}^2 = 210$.

On a donc $P\{Y_2 = 0/Y_1 = 0\} = \frac{210}{276}$. L'expression de $P\{Y_2 = 1/Y_1 = 0\}$ s'en déduit immédiatement : $P\{Y_2 = 1/Y_1 = 0\} = 1 - \frac{210}{276}$. On obtient alors :

$$H(Y_2/Y_1 = 0) = H_2\left(\frac{210}{276}\right) \approx 0{,}7936 \text{ bit}$$

En raisonnant de même pour $Y_1 = 1$ et $Y_1 = 2$, on trouverait :

$$P\{Y_2 = 0 / Y_1 = 1\} = \frac{7 \times C_{21}^{1}}{192} = \frac{147}{192} \text{ soit } H(Y_2 / Y_1 = 1) = H_2\left(\frac{147}{192}\right) \approx 0{,}7856 \text{ bit}$$

$$P\{Y_2 = 0 / Y_1 = 2\} = \frac{C_7^2}{28} = \frac{21}{28} \text{ soit } H(Y_2 / Y_1 = 2) = H_2\left(\frac{21}{28}\right) \approx 0{,}8113 \text{ bit}$$

En appliquant la relation $H(Y_2 / Y_1) = \sum_{j=0}^{2} P\{Y_1 = j\} \times H(Y_2 / Y_1 = j)$, on obtient :

$$H(Y_2 / Y_1) \approx 0{,}7915 \text{ bit}$$

Finalement, l'information moyenne apportée par les deux réponses de A sur la main à découvrir est de $1{,}2347 + 0{,}7915 = 2{,}0262 \text{ bits}$.

EXERCICE 2

1. La matrice de transition est :

$$T = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Le débit d'entropie de U s'écrit $H'(U) = D_S \times H_\infty(U)$. La source ayant une mémoire d'ordre 1, on a $H_\infty(U) = H(U_n / U_{n-1})$. Les lignes de la matrice de transition n'étant pas toutes identiques, il faut calculer la loi stationnaire.

La chaîne U étant récurrente, sa loi stationnaire $\mu = (x, y)$ existe et vérifie :

$$\begin{cases} \mu = \mu T \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y}{2} + \frac{z}{2} \\ y = x \\ z = \frac{y}{2} + \frac{z}{2} \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}$$

L'interprétation des lignes de la matrice de transition permet d'écrire :

$$H(U_n / U_{n-1} = 0) = 0$$

$$H(U_n / U_{n-1} = 1) = H(U_n / U_{n-1} = 2) = H_2\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \text{ bit}$$

D'où

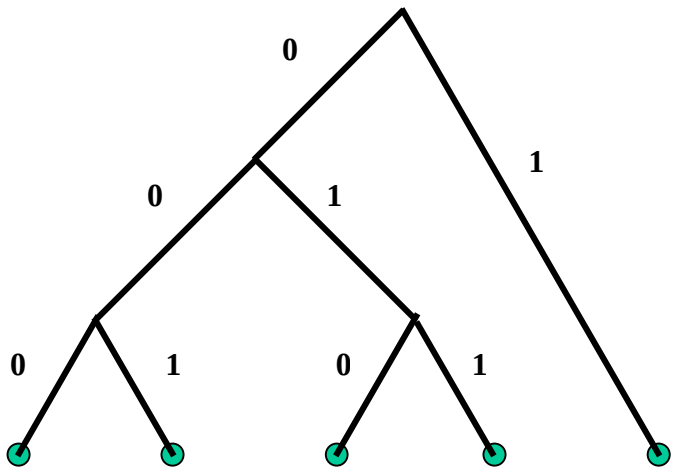
$$H(U_n / U_{n-1}) = \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 1 = \frac{2}{3} = 0{,}666 \text{ bit}$$

Le débit d'information est : $\boxed{H'(U) = 3000 \times \frac{2}{3} = 2 \text{ Kbits/sec}}$

2. Pour effectuer le codage de Huffman de l'extension d'ordre 2 de U, il faut constituer tous les mots possibles formés de deux lettres source en leur affectant leurs probabilités respectives. En prenant comme convention le déroulement du temps de la gauche vers la droite, on obtient :

mots source	probabilités
01	(1/3)x1 =1/3
10	(1/3)x(1/2)=1/6
12	(1/3)x(1/2)=1/6
20	(1/3)x(1/2)=1/6
22	(1/3)x(1/2)=1/6

L'application de l'algorithme de Huffman conduit à :



Mots source	**22**	**20**	**12**	**10**	**01**
Probabilit	**(1/6)**	**(1/6)**	**(1/6)**	**(1/6)**	**(1/3)**

On obtient donc :

mots source	probabilités	mots code
01	(1/3)x1 =1/3	1
10	(1/3)x(1/2)=1/6	011
12	(1/3)x(1/2)=1/6	010
20	(1/3)x(1/2)=1/6	001
22	(1/3)x(1/2)=1/6	000

La longueur moyenne d'un mot code s'en déduit aisément :

$$\overline{n_2} = 1 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{2}{3} = \frac{7}{3} = 2{,}333$$

Le nombre moyen de bits utilisés pour coder les valeurs de U est donc :

$$\overline{n} = \frac{\overline{n_2}}{2} = \frac{7}{6} = 1{,}166$$

EXERCICE 3

1. Il s'agit de vérifier que la condition du deuxième théorème de Shannon est satisfaite.
L'entropie de la source par symbole est $H_2(0{,}01) \approx 0{,}0808 \text{ bit}$.
La capacité du canal par utilisation est $C = 1 - H_2\left(2 \times 10^{-2}\right) \approx 0{,}8585 \text{ bit}$.
Le débit d'entropie vaut $H' = H_\infty(S) \times D_S \approx 0{,}0808 \times 300000 = 24240 \text{ bits/sec}$
La capacité par unité de temps vaut $C' = C \times D_C \approx 0{,}8585 \times 200000 = 171700 \text{ bits/sec}$

Le débit d'entropie étant inférieur à la capacité par unité de temps, on constate que la condition du deuxième théorème de Shannon est vérifiée et qu'en utilisant un code approprié, on pourra transmettre le contenu de S avec une probabilité d'erreur aussi petite que souhaitée.

2. Si $D_{S'}$ est le débit symbole de la nouvelle source binaire S' obtenue à partir de S par un codage de source, alors le fait d'ajouter un élément binaire de contrôle à chaque élément binaire d'information nécessite de vérifier la relation :

$$D_{S'} \leq \frac{D_C}{2}$$

Or $\frac{D_C}{2} = \frac{200 \text{ Kbits/sec}}{2} = 100 \text{ Kbits/sec} = \frac{D_S}{3}$ (puisque $D_S = 300 \text{ Kbits/sec}$)

L'effet du codage de source doit donc se traduire par une division par 3 du débit initial.

Si $\bar{n}$ désigne le nombre moyen de bits utilisés pour représenter un symbole source, cela signifie qu'il faut vérifier $\bar{n} \leq \frac{1}{3} \approx 0{,}333$. La source étant sans mémoire, on sait qu'il existe un code uniquement déchiffrable pour coder l'extension d'ordre L de la source qui vérifie :

$$\bar{n} < H_{\infty}(S) + \frac{1}{L}$$

A ordre d'extension de la source fixé, on sait aussi que le code de Huffmann est le meilleur (au sens de $\bar{n}$ le plus petit). Ainsi il faut coder l'extension d'ordre L de S par l'algorithme de Huffman avec L vérifiant :

$$H_{\infty}(S) + \frac{1}{L} \leq 0{,}333 \text{ soit } \frac{1}{L} \leq 0{,}3333 - 0{,}0808 = 0{,}2525$$

soit encore $L \geq 3{,}96$

Il faut donc utiliser un code de Huffman de **l'extension d'ordre 4** de S.