CORRIGE DE L'EXAMEN DU 4 DECEMBRE 2002

EXERCICE 1

1. Notons X la variable aléatoire décrivant l'identification des pièces défectueuses. Le nombre de valeurs possibles de X correspond au nombre de configurations possibles de pièces défectueuses parmi les n.

Il y a;

1 configuration de 0 pièce défectueuse parmi les n
C_n^1 configurations de 1 pièce défectueuse parmi les n
C_n^2 configurations de 2 pièces défectueuses parmi les n

C_n^n configurations de n pièces défectueuses parmi les n

On obtient donc $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = (1+1)^n = 2^n$ valeurs possibles pour X. Le cas le plus défavorable (entropie maximum) correspond à une loi uniforme de X qui conduit à:

$H(X) = \log_2 2^n = n$ bits .

L'incertitude moyenne relative à l'identification des pièces défectueuses est donc de n bits.

2. Associons à chaque test une variable aléatoire de telle sorte que :

$X_k = 1\,(\text{resp. } 0) \quad \Leftrightarrow \quad \{\text{la pièce examinée au k}^{\text{ème}} \text{ test est défectueuse (resp. conforme}\}$

L'information moyenne apportée par le premier test sur l'identification des pièces défectueuses s'écrit : $I(X_1; X) = H(X_1) - H(X_1 / X) = H(X_1)$. La dernière égalité étant justifiée par le fait que la connaissance des pièces défectueuses entraîne la connaissance du résultat du test.

Plus généralement l'information moyenne apportée par les k premiers tests effectués s'écrit :

$I(X_1, X_2, ..., X_k; X) = H(X_1, X_2, ..., X_k) - H(X_1, X_2, ..., X_k / X) = H(X_1, X_2, ..., X_k)$

De plus, les résultats obtenus lors des tests étant indépendants, on a :

$$H(X_1, X_2,..., X_k) = \sum_{j=1}^{k} H(X_j)$$

Soit finalement $I(X_1, X_2,..., X_k; X) = \sum_{j=1}^{k} H(X_j)$

Le problème consiste donc à évaluer $H(X_k)$

Les considérations de la première question concernant l'équiprobabilité des différentes configurations impliquent que la probabilité qu'une pièce donnée soit défectueuse est 0,5.
En effet ,si p désigne la probabilité qu'une pièce soit défectueuse, alors l'hypothèse d'équiprobabilité de la première question entraîne que la probabilité d'avoir les n pièces défectueuses est $p^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, soit $p = \frac{1}{2}$.

Ainsi l'entropie de chaque variable X_k est de 1 bit. Par conséquent**, l'information moyenne apportée par les k premiers tests sur l'identification des pièces défectueuses est k bits.**

3. Le procédé décrit consistant à tester chacune des n pièces, on est assuré, après n tests, de connaître la "valeur" de X. On a donc :

$$I(X_1, X_2,..., X_n; X) = H(X) - H(X / X_1, X_2,..., X_n) = H(X)$$

Le résultat établi à la question précédente appliqué à $k = n$ conduit à :

$I(X_1, X_2,..., X_n; X) = n$ bits , ce qui coïncide avec la valeur de $H(X)$ déterminée à la première question..

EXERCICE 2

Première association

Le canal proposé est bien entendu symétrique car les "0" et les "1" sont traités de la même manière. Il s'agit donc d'un canal binaire symétrique. Si on n'est pas convaincu de ce résultat, il faut calculer deux probabilités de transition appartenant à deux lignes différentes de la matrice de transition.

Notons X la variable d'entrée commune aux deux canaux, Y_1 (resp. Y_2) la variable de sortie du canal situé en haut (resp. en bas) du dessin et Y la sortie de l'organe de décision. Calculons (par exemple) $P\{Y = 0 / X = 0\}$.

Compte tenu du mode de fonctionnement du dispositif, on a :

$$\{Y = 0\} = \{Y_1 = A \cap Y_2 = D\} \cup \{Y_1 = A \cap Y_2 = C \cap Y = 0\} \cup \{Y_1 = A \cap Y_2 = C \cap Y = 0\}$$

Les événements formant la réunion étant deux à deux incompatibles :

$$P\{Y=0/X=0\}=P\{Y_1=A\cap Y_2=D/X=0\}+P\{Y_1=A\cap Y_2=C\cap Y=0/X=0\}$$
$$+P\{Y_1=B\cap Y_2=D\cap Y=0/X=0\}$$

A entrée fixée $(\text{ici } X=0)$ les sorties des canaux sont indépendantes. Par conséquent :

$$P\{Y_1=A\cap Y_2=D/X=0\}=P\{Y_1=A/X=0\}\times P\{Y_2=D/X=0\}=(1-p)^2$$

En outre,

$$P\{Y_1=A\cap Y_2=C\cap Y=0/X=0\}=\frac{P\{Y_1=A\cap Y_2=C\cap Y=0\cap X=0\}}{P\{X=0\}}$$

et

$$P\{Y_1=A\cap Y_2=C\cap Y=0/X=0\}=\frac{P\{Y=0/Y_1=A\cap Y_2=C\cap X=0\}\times P\{Y_1=A\cap Y_2=C\cap X=0\}}{P\{X=0\}}$$

soit

$$P\{Y_1=A\cap Y_2=C\cap Y=0/X=0\}=P\{Y=0/Y_1=A\cap Y_2=C\cap X=0\}\times P\{Y_1=A\cap Y_2=C/X=0\}$$

or

$P\{Y_1=A\cap Y_2=C/X=0\}=(1-p)\times p$. (Ce calcul est analogue à $P\{Y_1=A\cap Y_2=D/X=0\}$ qui a été effectué précédemment).

De plus, la variable Y est une fonction déterministe des variables Y_1 et Y_2 et par conséquent à Y_1 et Y_2 fixés, elle ne dépend pas de X. Ainsi :

$$P\{Y=0/Y_1=A\cap Y_2=C\cap X=0\}=P\{Y=0/Y_1=A\cap Y_2=C\}=\frac{1}{2}$$

On a donc :

$$P\{Y_1=A\cap Y_2=C\cap Y=0/X=0\}=\frac{1}{2}\times p(1-p)$$

De façon analogue, on trouverait :

$$P\{Y_1=B\cap Y_2=D\cap Y=0/X=0\}=\frac{1}{2}\times p(1-p)$$

On obtient finalement :

$$P\{Y=0/X=0\}=(1-p)^2+2\times\frac{1}{2}\times p(1-p)=(1-p)$$

Les "0" et les "1" étant traités de la même manière, on obtiendrait :

$$P\{Y=1/X=1\}=(1-p)$$

On a par conséquent :

$$P\{Y=1/X=0\}=P\{Y=0/X=1\}=p$$

Il s'agit donc d'un canal binaire symétrique de probabilité d'erreur p et de capacité égale à $1-H_2(p)$.

Deuxième association

Comme le précédent, il s'agit d'un canal binaire symétrique. Notons X la variable d'entrée, N le nombre de sorties des canaux égales simultanément à 0 et Y la variable de sortie. On a :

$$P\{Y=0/X=0\}=P\{N=3\cup N=2/X=0\}=P\{N=3/X=0\}+P\{N=2/X=0\}$$

or,

$$P\{N=3/X=0\}=(1-p)^3 \text{ et } P\{N=2/X=0\}=3(1-p)^2 p$$

soit

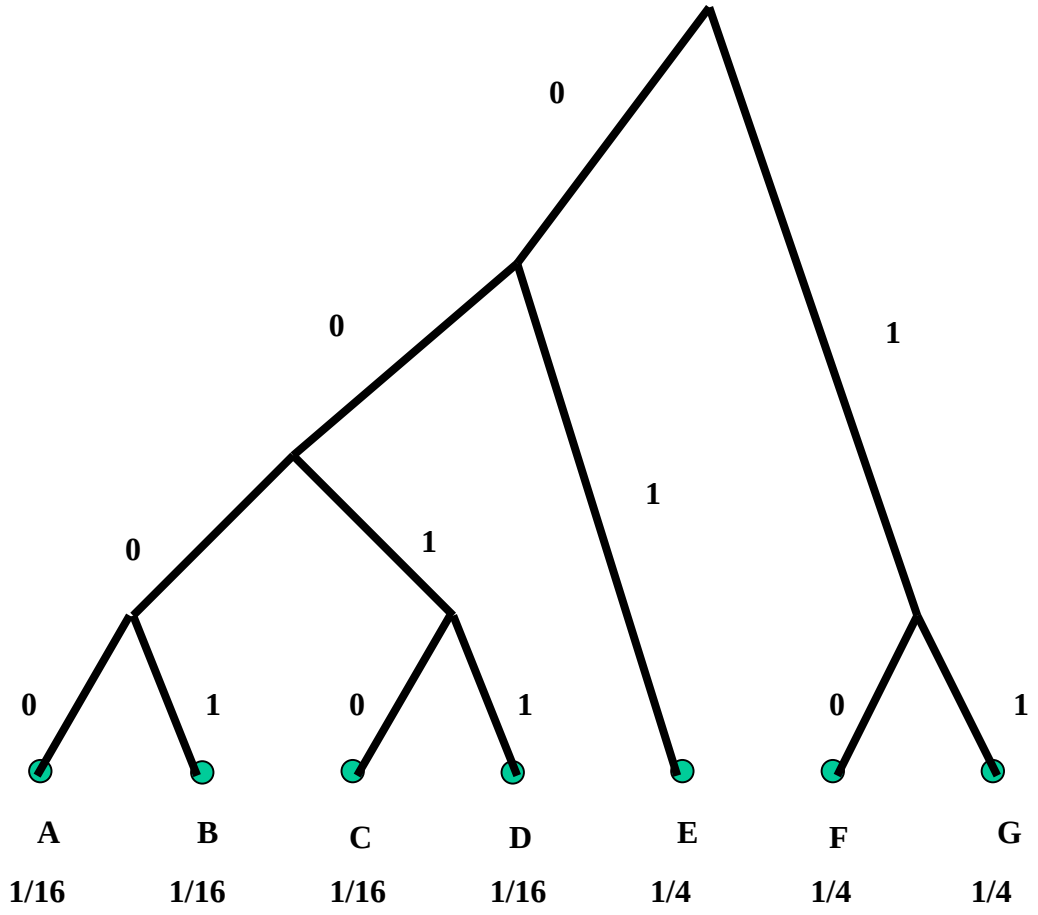
$$P\{Y=0/X=0\}=(1-p)^3+3(1-p)^2 p=(1-p)^2[1-p+3p]=(1-p)^2(1+2p)$$

La probabilité d'erreur du canal est
$1-(1-p)^2(1+2p)=1-(1-2p+p^2+2p-4p^2+2p^3)=p^2(3-2p)$

Sa capacité est $1-H_2(p^2(3-2p))$

EXERCICE 3

1. La mise en œuvre de l'algorithme de Huffman conduit à l'arbre ci-dessous :



On obtient les mots code :

mots source	mots code
A	0000
B	0001
C	0010
D	0011
E	01
F	10
G	11

Le nombre moyen d'éléments binaires utilisés pour représenter une lettre source est :

$$\bar{n} = 4\times\left(4\times\frac{1}{16}\right)+2\times\left(3\times\frac{1}{4}\right)=2{,}5$$

L'entropie de la source S est :

$$H_\infty(S)=4\times\left(-\frac{1}{16}\right)\times\log_2\left(\frac{1}{16}\right)+3\times\left(-\frac{1}{4}\right)\times\log_2\left(\frac{1}{4}\right)=4\times\frac{1}{4}+2\times\frac{3}{4}=2{,}5\,\text{bits}$$

Il s'agit donc d'un code optimum.

2. La correspondance entre les mots source et les mots code est bijective. De plus, à un mot source, donc à une réalisation de S, il correspond en moyenne $\bar{n}$ réalisations de U. Donc l'incertitude moyenne sur un symbole de S se retrouve sur $\bar{n}$ réalisations de U. Par conséquent on a la relation :

$$H_\infty(S)=\bar{n}H_\infty(U)$$

Remarque

On aurait pu raisonner en termes de débit d'information. Le codage effectué étant sans perte d'information, cela signifie que les débits d'entropie de S et de U sont égaux. Ainsi, si D_S est le débit symbole de S, le débit symbole de U est $D_U=\bar{n}D_S$. L'égalité des débits d'entropie s'écrit alors :

$$D_S H_\infty(S)=D_U H_\infty(U)=\bar{n}D_S H_\infty(U)$$

soit $H_\infty(U)=\dfrac{H_\infty(S)}{\bar{n}}=1\,\text{bit}$

3. Soit n un très grand nombre de lettres source. L'application de la loi des grands nombres nous indique que le nombre de A qui apparaissent dans cette suite est $n\times P(S=A)$ et bien sûr il en est de même pour les autres lettres. Ainsi on peut évaluer le nombre de "0" qui apparaissent dans cette suite :

$$n_0 = 4\times n\times P\{S=A\}+3\times n\times\left[P\{S=B\}+P\{S=C\}\right]+2\times P\{S=D\}+1\times n\times\left[P\{S=E\}+P\{S=F\}\right]$$

$$n_0 = n\left[4\times\frac{1}{16}+3\times\left(2\times\frac{1}{16}\right)+2\times\frac{1}{16}1\times\left(2\times\frac{1}{4}\right)\right]=n\frac{20}{16}$$

Calculons le nombre de "1" dans cette même suite :

$$n_1 = 1\times n\times\left[P\{S=B\}+P\{S=C\}+P\{S=E\}+P\{S=F\}\right]+2\times n\times\left[P\{S=D\}+P\{S=G\}\right]$$

$$n_1 = n\left[1\times\left[2\times\frac{1}{16}+2\times\frac{1}{4}\right]+2\times\left[\frac{1}{16}+\frac{1}{4}\right]\right]=n\frac{20}{16}$$

Les fréquences absolues d'apparition des "0" et des "1" sont égales, par conséquent les probabilités d'apparition des "0" et des "1" sont égales et U suit une loi uniforme.

4. L'entropie de U étant maximale, elle est sans mémoire.

5. Plus généralement, si le codage binaire d'une source S est optimum, alors la longueur moyenne des mots code vérifie $\bar{n}=H_\infty(S)$ et l'entropie de la source binaire U résultant du codage a une entropie telle que $H_\infty(U)\times\bar{n}=H_\infty(S)$, soit :

$H_\infty(U)=1\,\text{bit}$. Cette source binaire U est sans mémoire et d'entropie maximale égale à 1.

L'objectif d'un codage de source est donc de construire une source sans mémoire de loi uniforme.