CORRIGE DE L'EXAMEN DU 4 FEVRIER 2003

EXERCICE 1

1. Notons $a_1a_2a_3a_4a_5$ les mots code. Puisqu'il s'agit d'un code systématique linéaire, les trois premiers (de la gauche vers la droite) bits des mots code correspondent aux mots source. De plus, les bits de contrôle a_4 et a_5 sont des combinaisons linéaires des bits d'information a_1, a_2, a_3. On a donc :

$a_4 = \alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3$ et $a_5 = \delta a_1 + \varepsilon a_2 + \eta a_3$

En outre, les éléments binaires de contrôle figurant dans le tableau fournissent les équations :

$\gamma = 0$ et $\eta = 1$ pour le mot source 001
$\varepsilon + \eta = 1$ pour le mot source 011
$\alpha = 1$ pour le mot source 100
$\delta + \eta = 1$ pour le mot source 101
$\alpha + \beta = 0$ pour le mot source 110

Soit $a_4 = a_1 + a_2$ et $a_5 = a_3$

On obtient ainsi le tableau :

mots source	mots code
000	**00000**
001	**00101**
010	**01010**
011	**01111**
100	**10010**
101	**10111**
110	**11000**
111	**11101**

2. La matrice génératrice se déduit aisément des relations $a_4 = a_1 + a_2$ et $a_5 = a_3$ et en tenant compte du fait que le code est systématique.

On obtient ainsi :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice de contrôle s'exprime alors à partir de la relation rappelée dans le formulaire :

$$H^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Il suffit de dénombrer les syndromes. La dimension de la matrice de contrôle est 2×5 et celle des mots reçus est 5×1. Donc les syndromes sont des vecteurs 2×1, par conséquent ils sont au nombre de $2^2 = 4$. Comme le vecteur « tout à zéro » est réservé aux mots code, il reste 3 valeurs de syndromes pour corriger les erreurs. Au maximum on peut corriger 3 configurations d'une erreur.

4. Calculons les syndromes correspondant à une erreur sur un bit d'information.

A une erreur sur le premier bit correspond le syndrome :

$$H^T \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A une erreur sur le deuxième bit correspond le syndrome :

$$H^T \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il s'agit donc du même syndrome. Par conséquent, il n'est pas possible de corriger une erreur sur n'importe quel bit d'information.

5. En procédant comme on l'a fait à la question précédente, on obtient :

A une erreur sur le premier bit de contrôle correspond le syndrome :

$$H^T \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A une erreur sur le second bit de contrôle correspond le syndrome :

$$H^T \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Les deux syndromes obtenus étant différents, on peut corriger une erreur sur n'importe quel bit de contrôle.

EXERCICE 2

1. Le débit d'entropie H' de S s'écrit $H' = D_S \times H_\infty(S)$. S étant une chaîne de Markov, on a $H_\infty(S) = H(S_n / S_{n-1})$. Ecrivons la matrice de transition de S :

$$\mathrm{T} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

On déduit de cette matrice les entropies conditionnelles :

$H(S_n / S_{n-1} = 0) = H_2(1/4)$ et $H(S_n / S_{n-1} = 1) = 0$

soit $H_\infty(S) = P\{S = 0\} \times H_2(1/4)$

Il est donc nécessaire de calculer la loi limite de S (elle existe puisque la chaîne est récurrente). Soient $x = P\{S = 0\}$ et $y = P\{S = 1\}$. La loi limite (x, y) vérifie :

$(x, y) = (x, y) \times T$

soit

$$\begin{cases} x = \dfrac{x}{4} + y \\ y = \dfrac{3x}{4} \\ x + y = 1 \end{cases}$$

On obtient $x = \dfrac{4}{7}$ et $y = \dfrac{3}{7}$

Par conséquent : $H' = D_S \times P\{S = 0\} \times H_2\left(\dfrac{1}{4}\right) \approx 2 \times 10^6 \times \dfrac{4}{7} \times 0{,}81128 \approx 927{,}175$ Kbits/sec

2. Soient D_U le débit d'utilisation du canal et C sa capacité par utilisation. La condition du deuxième théorème de Shannon s'énonce :

$H' < D_U \times C$ soit $D_U > \dfrac{H'}{C}$

Or le canal étant binaire symétrique, sa capacité par utilisation nous est rappelée par le formulaire, à savoir :

$C = 1 - H_2(p) = 1 - H_2(10^{-2}) \approx 0{,}919$ bit

Le débit d'utilisation du canal doit donc vérifier :

$$\boxed{D_U > \frac{927{,}175 \times 10^3}{0{,}919} \approx 1{,}0089 \text{ Mbits/sec}}$$

3. Il faut recenser les mots de l'extension d'ordre 3 de S en excluant ceux qui n'ont aucune chance d'apparaître (un « 1 » ne peut suivre un « 1 »). Ensuite il faut affecter à chaque mot sa probabilité en tenant compte de la mémoire de la source. Ainsi, par exemple, le mot « 001 » a une probabilité égale à : $P\{S_{n+1} = 1 \cap S_n = 0 \cap S_{n-1} = 0\}$, soit :

$$P\{S_{n+1} = 1 / S_n = 0 \cap S_{n-1} = 0\} \times P\{S_n = 0 \cap S_{n-1} = 0\}$$

or, puisqu'il s'agit d'une chaîne de Markov, on peut simplifier le premier facteur :

$$P\{S_{n+1} = 1 / S_n = 0\} \times P\{S_n = 0 \cap S_{n-1} = 0\}$$

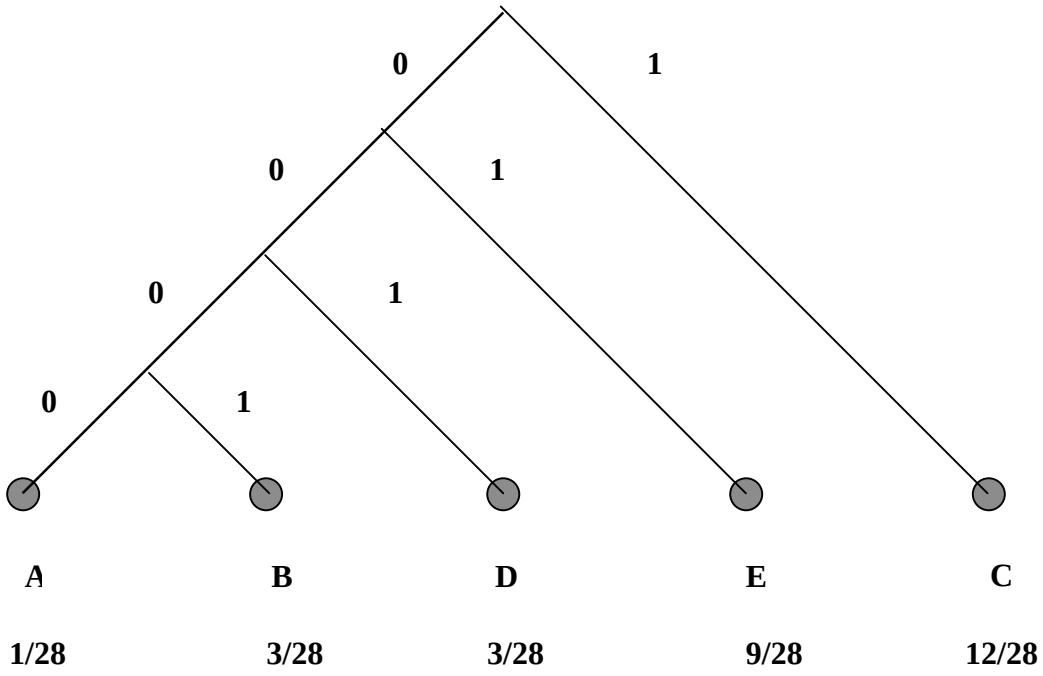
soit encore :

$$P\{S_{n+1} = 1 / S_n = 0\} \times P\{S_n = 0 / S_{n-1} = 0\} \times P\{S_{n-1} = 0\} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{4}{7} = \frac{3}{28}$$

En procédant de même pour les autres mots, on obtiendrait :

mots source	probabilités
000 (A)	1/28
001 (B)	3/28
010 (C)	12/28
100 (D)	3/28
101 (E)	9/28

L'application de l'algorithme de Huffman conduit à l'arbre :



La correspondance entre les mots source et les mots code est résumée dans le tableau :

mots source	mots code
000 (A)	0000
001 (B)	0001
010 (C)	1
100 (D)	001
101 (E)	01

Le calcul de la réduction du débit initial s'effectue grâce à la longueur moyenne $\overline{n_3}$ des mots code.

$$\overline{n_3} = 4\times\left(\frac{1}{28}+\frac{3}{28}\right)+3\times\frac{3}{28}+2\times\frac{9}{28}+\frac{12}{28}=\frac{55}{28}$$

Ainsi le nombre moyen d'éléments binaires utilisés par ce code pour représenter un élément binaire de S est $\frac{\overline{n_3}}{3}\approx 0{,}655$. La réduction du débit binaire d'origine est donc de l'ordre de 34,5%.

EXERCICE 3

Déterminons la matrice de transition. Si on note X la variable d'entrée et Y la variable de sortie, on a :

$P\{Y=0/X=0\}=(1-p)^2+p^2=1-2p+2p^2$
Donc $P\{Y=1/X=0\}=1-(1-2p+2p^2)=2p-2p^2$

Le calcul de $P\{Y=1/X=1\}$ conduirait de la même façon à $1-2p+2p^2$. Il s'agit donc d'un canal binaire symétrique de probabilité d'erreur $2p-2p^2$. En utilisant la relation du formulaire, on en déduit la capacité $C=1-H_2(2p-2p^2)$ exprimée en bit.