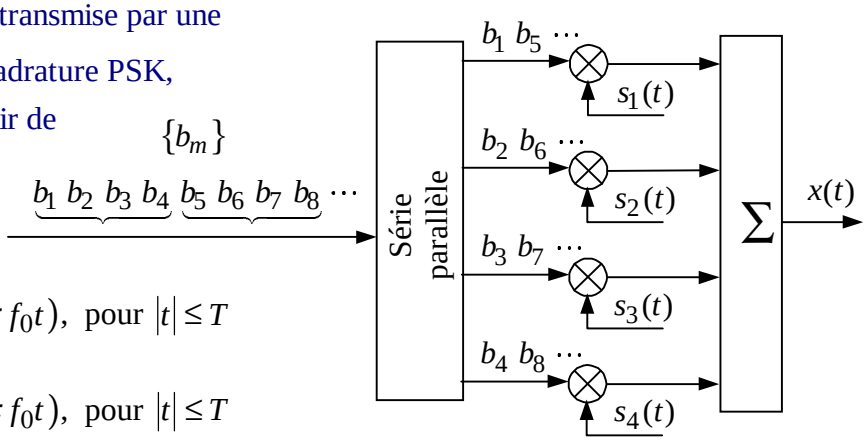
CORRIGE du Contrôle1 CN21 2001/2002

A) MODULATION Q²PSK.

On considère une suite binaire $\{b_m\}$ à éléments successifs indépendants et identiquement distribués (i.i.d.), prenant ses valeurs dans l'ensemble $\{\pm 1\}$. Le débit binaire est de 10Mbit/s.

Cette suite binaire $\{b_m\}$ est transmise par une modulation Quadrature-Quadrature PSK, un symbole est formé à partir de quatre bits d' après le schéma ci contre :



$$s_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{2T}\right) \cdot \cos(2\pi f_0 t), \text{ pour } |t| \le T$$

$$s_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{2T}\right) \cdot \cos(2\pi f_0 t), \text{ pour } |t| \le T$$

$$s_3(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{2T}\right) \cdot \sin(2\pi f_0 t), \text{ pour } |t| \le T$$

$$s_4(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{2T}\right) \cdot \sin(2\pi f_0 t), \text{ pour } |t| \le T$$

(T est la période symbole) ($f_0 = 1\text{GHz}$)

Le signal émis s'écrit $x(t) = \sum_k \left(\sum_{i=1}^{4} b_{4k+i} \cdot s_i(t - kT) \right)$

1) Montrer que les signaux, $s_i(t)$, sont orthogonaux.

$$\cos^2 b = \frac{1}{2}(1 + \cos 2b) \ ; \quad \frac{1}{2}(1 + \cos 2b)\sin a = \frac{1}{2}\left(\sin a + \frac{1}{2}\left(\sin(a + 2b) + \sin(a - 2b)\right)\right)$$

intégrale d'une fonction impaire sur $[-T, +T]$

\+ condition $f_0 T = 400 \in \mathbb{N}$ porteuses orthogonales

2) Quelle est l'énergie moyenne émise par bit ? $E_b = 1$ Joule/bit

$$E_s = \mathrm{E}\left\{ \int_{-T}^{+T} \left| \sum_{i=1}^{4} b_i s_i(t) \right|^2 dt \right\} = \int_{-T}^{+T} \sum_{i=1}^{4} E\left\{ b_i^2 \right\} |s_i(t)|^2 dt = \int_{-T}^{+T} \frac{2}{T} dt = 4 \text{ J/symbole}, \quad E_b = 1 \text{ J/bit}$$

3) Quelle est l'enveloppe complexe $\alpha_x(t)$, par rapport à f_0, de $x(t)$?

$$t_k = t - kT; \quad \sum_k \cos\left(\frac{\pi t_k}{2T}\right) \cdot \cos(2\pi f_0 t_k) \cdot \Pi_{2T}(t_k) = \sum_k \cos\left(\frac{\pi t_k}{2T}\right) \cdot \Pi_{2T}(t_k) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$$

d'où $\alpha_x(t) = \sum_k \frac{1}{\sqrt{T}} \left((b_{4k+1} - j b_{4k+3}) \cos\left(\frac{\pi t_k}{2T}\right) + (b_{4k+2} - j b_{4k+4}) \sin\left(\frac{\pi t_k}{2T}\right) \right) \cdot \Pi_{2T}(t_k)$

4) Ecrire $\alpha_x(t)$ sous la forme $\sum_k \left(a_{1k}\, g_1(t-kT) + a_{2k}\, g_2(t-kT)\right)$ et en déduire sa DSP.

$$g_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \cos\left(\frac{\pi t}{2T}\right) \Pi_{2T}(t) \quad g_2(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sin\left(\frac{\pi t}{2T}\right) \Pi_{2T}(t) \quad a_{1k} = b_{4k+1} - j b_{4k+3}$$

Formule de Bennett. $S_{\alpha_x}(f) = \frac{2}{T}\left|G_1(f)\right|^2 + \frac{2}{T}\left|G_2(f)\right|^2$

$$\sin 2\pi\left(fT + \frac{1}{4}\right) = \sin\left(2\pi fT + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2\pi fT$$

$$G_2(f) = \frac{2T}{j\sqrt{T}}\left(\mathrm{Sinc}\, 2\pi\left(fT - \frac{1}{4}\right) - \mathrm{Sinc}\, 2\pi\left(fT + \frac{1}{4}\right)\right) = \frac{16\sqrt{T}}{\pi^2} \cdot \frac{2\pi fT \cdot \cos 2\pi fT}{1 - 16 f^2 T^2}$$

$$G_1(f) = \frac{2T}{\sqrt{T}}\left(\mathrm{Sinc}\, 2\pi\left(fT - \frac{1}{4}\right) + \mathrm{Sinc}\, 2\pi\left(fT + \frac{1}{4}\right)\right) = \frac{16\sqrt{T}}{\pi^2} \cdot \frac{\frac{\pi}{2} \cdot \cos 2\pi fT}{1 - 16 f^2 T^2}$$

$$S_{\alpha_x}(f) = 4 \cdot 2\left(\mathrm{Sinc}^2\, 2\pi\left(fT - \tfrac{1}{4}\right) + \mathrm{Sinc}^2\, 2\pi\left(fT + \tfrac{1}{4}\right)\right) = \frac{8}{4\pi^2}\left(\frac{\cos^2 2\pi fT}{\left(fT + \frac{1}{4}\right)^2} + \frac{\cos^2 2\pi fT}{\left(fT - \frac{1}{4}\right)^2}\right)$$

5) Comparer l'efficacité spectrale de la QQPSK à celle de la MSK.

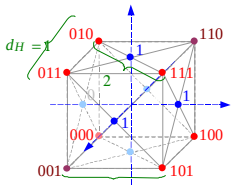
$$S_{\alpha_x}(f) = \frac{16^2}{4\pi^2} \frac{\left(1 + 16 f^2 T^2\right)\cos^2 2\pi fT}{\left(1 - 16 f^2 T^2\right)^2} \qquad S_{\substack{\alpha_x \\ MSK}}(f) = \frac{16 A^2 T}{\pi^2} \cdot \frac{\cos^2 2\pi fT'}{\left(1 - 16 f^2 T'^2\right)^2}$$

Mais $D_s' = 2 \cdot D_s$ (2 bits par symbole au lieu de 4)

6) Décrire la constellation de cette modulation, un codage de Gray est -il possible?

Hypercube 4D d'axes s_1, s_2, s_3, s_4 (ex en 3D :

Chaque point à 4 voisins immédiats à une distance de dmin



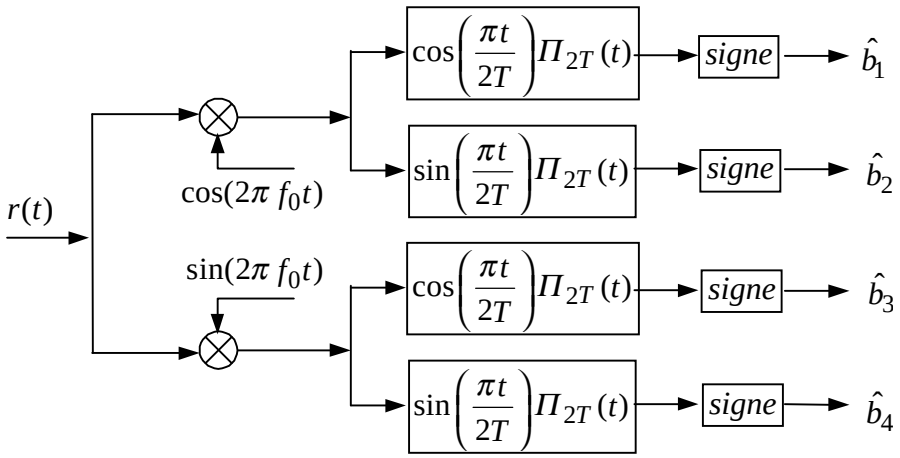
7) Donner la représentation vectorielle et déterminer la distance minimale entre les points en fonction de l'énergie moyenne par symbole.

4D Ensemble des vecteurs de la forme $\mathbf{v} = \frac{\sqrt{E_s}}{2}\left[\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1\right]^T$ équiprobables et de même énergie $E_i = \left|\mathbf{v}_i\right|^2 = \frac{E_s}{4} \cdot 4$; $d_{\min} = \sqrt{E_s}$. Le codage de Gray est naturel (systématique).

8) La transmission se fait dans un canal idéal BABG, le récepteur est optimal cohérent.

Donner la structure du récepteur (schéma).

Démodulateurs en quadrature et filtres adaptés à chaque forme (cos et sin)



9) Calculer un majorant de la probabilité d'erreur par bit résiduelle. (Borne de l'union).

Chaque point à 4 voisins à distance min qui ne différent que d'un seul bit

$$E_s = E_b \cdot D_b / D_s = 4E_b ; \qquad d^2_{\min} = E_s ; \qquad \Pr\{Erb\} \le \sum_{i=1}^{M=16} \left(4 \cdot 1 \cdot \mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{2 \cdot E_b}{N_0}} \right) \right) \cdot \frac{1}{16}$$

10) Calculer la probabilité d'erreur résiduelle exacte. Comparer à la MAQ-4.

La décision se fait sur chaque voie pour chaque bit, ceux-ci sont indépendants donc la probabilité d'erreur par symbole est de faire au moins un bit faux. Mais la probabilité d'erreur par bit est celle obtenue sur chacune des voies du récepteur optimal puisqu'elles sont identiques.

$$\Pr\{Erb\} = \mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{d^2_{bit}}{2N_0}} \right) = \mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{d^2_{\min}}{2N_0}} \right) = \mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \right)$$

11) AN : $P_e = 1$ mW. Affaiblissement 40 dB. $N_0 = -170$ dBW/Hz .

Energie par bit reçue $E_b = P_e \cdot Aff / D_b \rightarrow E_b = -30 - 40 - 70 = -140$dB

$$E_b / N_0 = 30\text{dB} ; \qquad \Pr\{Erb\} = \mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \right) \approx 0$$

B) CANAL DE RAYLEIGH.

On transmet un débit de 1 Gbit/s par un multiplex OFDM de 100 porteuses modulées 4-PSK.
Le canal est non stationnaire et dispersif, tel que le temps de dispersion est de 100ns.

1) Que peut-on dire de la sélectivité du canal ?

Débit par porteuse de 5 Mbit/s. Bande de cohérence de 10 MHz, le canal n'est pas sélectif pour une porteuse modulée. Par contre le canal est sélectif d'une porteuse à l'autre.

2) Comment peut-on faire de la diversité sur ce canal ?

Les porteuses ont des gains différents et indépendants, on enverra la même information sur plusieurs porteuses. Ceci diminuera la quantité d'information transmise.
On peut aussi faire de la diversité de réception avec plusieurs antennes, ou de la diversité dans le temps ou autres.

3) On mesure, maintenant, un étalement Doppler de 100Hz, comment peut-on faire de la diversité dans le temps ?

On transmet plusieurs fois la même information sur des intervalles de temps espacés de plus que le temps de cohérence du canal qui est de 10ms. Comme le débit est de 5 Mbit/s, cela fait un écart de 50 000 bits.

On fait une diversité d'ordre 5, chaque porteuse est considérée comme transmise sur un canal de Rayleigh indépendant des autres. Pour un symbole émis $s_m(t)$ on récupère les 5 signaux d'équivalent BdB $r_l(t) = \alpha_l \cdot s_m(t) + b_l(t)$ pour $l = 1,\ldots,5$. Les bruits sont de PA Gaussiens centrés indépendants de corrélation $R_b(\tau) = N_0 \cdot \delta(\tau)$.

4) On forme la variable de décision $U = \sum_{l=1}^{5} \text{Re}\left\{\int r_l(t) \cdot s_m^*(t) dt\right\}$ par addition des sorties des filtres adaptés à $s_m(t)$.

Donner la loi de la variable *U* conditionnellement aux valeurs fixées des $a_l = \text{Re}(\alpha_l)$.

Loi Gaussienne centrée sur $\left(\sum_{l=1}^{5} a_l\right) \cdot E_m$ de variance $\sigma^2 = 5 \cdot \frac{N_0}{2} \cdot E_m$.

5) Quelle est l'expression de la probabilité d'erreur moyenne quand les a_l sont des variables indépendantes qui suivent la même loi de Rayleigh?

$$p_{\gamma_n}(x) = p_{\gamma_{n,1}} * p_{\gamma_{n,2}} * \cdots * p_{\gamma_{n,L}} = \frac{x^{L-1}}{(L-1)!\,\gamma^L} \cdot \exp\left(-\frac{x}{\gamma}\right) \cdot \text{u}(x)$$

Voir cours

$$\Pr\{Ers\} = \int_0^{+\infty} Q\left(\sqrt{2x}\right) \frac{x^{L-1}}{(L-1)!\,\gamma^L} \cdot \exp\left(-\frac{x}{\gamma}\right) dx$$