CORRIGE du Contrôle1 CN21 2002/2003

A) MODULATION MAQ-8.

On considère des données binaires, au débit de 6 Mbit/s, à transmettre sur un canal non dispersif à BABG de DSP bilatérale $N_0/2$. La transmission se fait à l'aide d'une modulation de deux porteuses en quadrature à 8 états. Les données binaires $\{b_l\}$ sont i.i.d équiprobables, deux bits sont affectés à la voie en phase et un seul bit (± 1) à la voie en quadrature.

Les symboles sont émis avec la forme $g(t) = A \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{T_s}\right) \cdot \Pi_{T_s}(t)$

1. Donner l'expression littérale, $x(t)$, de la modulation.

Forme générale voir cours.

2. Donner l'expression littérale, $s(t)$, de son équivalent en Bande de Base.

Idem forme générale voir cours : $s(t) = \sum_k d_k \cdot g(t - kT_s)$ avec $d_k = d_{pk} + j d_{qk}$

3. Quel est le débit symbole D_s ?

$D_s = D_b / \log_2 8 = 2\text{Mbauds}$

4. Calculer l'énergie moyenne par symbole E_s.

$E_s = \mathrm{E}\{E_i\}$; $E_i = \int \left| d_i \cdot A \cdot \cos(\pi t / T) \cdot \Pi_T(t) \right|^2 dt = |d_i|^2 \cdot A^2 \cdot T_s / 2$

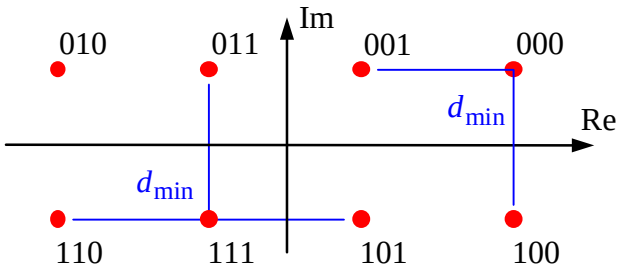
$|d_i|^2 = (1+1)$ ou $(9+1)$ équiprobables ; $E_s = \mathrm{E}\{E_i\} = \frac{(2 \cdot 4 + 10 \cdot 4)}{8} \cdot A^2 \cdot T_s / 2$; $E_s = 3 \cdot A^2 \cdot T_s$.

5. Donner une représentation vectorielle des symboles émis.

En projetant sur $\varphi(t) = \sqrt{\frac{2}{T_s}} \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{T_s}\right) \cdot \Pi_{T_s}(t)$ normé, les 8 formes s'écrivent dans le plan complexe

$\begin{bmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \end{bmatrix} \cdot A\sqrt{T_s/2}$ et $\begin{bmatrix} \pm 3 \\ \pm 1 \end{bmatrix} \cdot A\sqrt{T_s/2}$

6. Dessiner la constellation de cette modulation en indiquant un codage de Gray.



7. Donner la distance minimale entre les points en fonction de l'énergie moyenne par bit E_b.

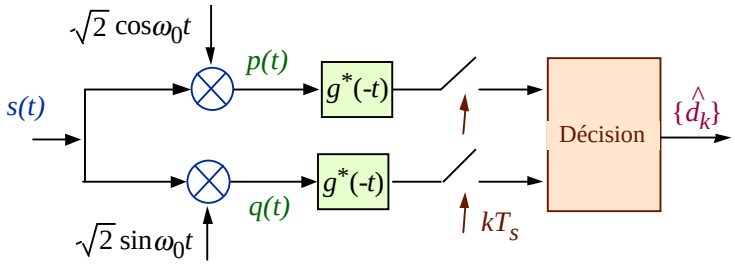
$$d_{\min} = 2 \cdot A\sqrt{T_s / 2} \;\; ; \;\; E_b = E_s \cdot D_s / D_b = 3 \cdot A^2 \cdot T_s / 3 \quad \text{soit} \quad d_{\min} = \sqrt{2 \cdot E_b} \, .$$

8. Le récepteur est optimal, montrer qu'il n'y a pas d'interférence entre symbole.

Le filtre adapté à $g(t) = A \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{T_s}\right) \cdot \Pi_{T_s}(t)$ est $g^*(-t) = g(t)$. On vérifie aisément que

$h(t) = g(t) * g(t)$ est de largeur $2T_s$ et donc que $h(mT_s) = 0 \quad \forall m \neq 0$.

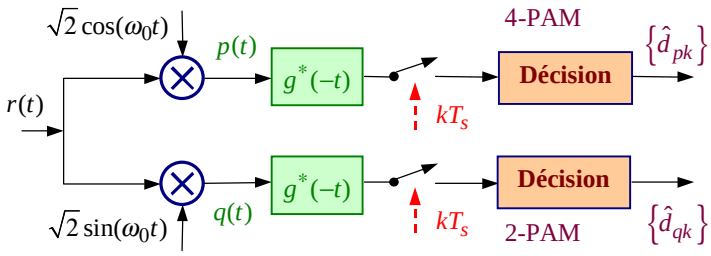
9. On fait une détection globale. Donner en fonction de E_b, l'expression du majorant de la borne de l'union de la probabilité d'erreur.



$\Pr\{Ers\} \leq \sum_{i=1}^{M} \left(\sum_{j \neq i} Q\left(\sqrt{\frac{d_{ij}^2}{2N_0}}\right) \right) \cdot \Pr\{H_i\}$, d'après la constellation les quatre points du milieu ont trois voisins à dmin et les quatre points des extrémités en ont deux ce qui donne :

$$\Pr\{Ers\} \leq (4 \cdot 3 + 4 \cdot 2) \cdot Q\left(\sqrt{\frac{d_{\min}^2}{2N_0}}\right) \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{2} Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

10. On fait une détection séparée sur chaque voie. . Donner en fonction de E_b, l'expression de la probabilité d'erreur.



$$\Pr_{\text{MIA}-4}\{Ers\} = 2\cdot\frac{4-1}{4}\cdot \text{Q}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}\cdot\frac{6\log_2 4}{4^2-1}}\right) = \frac{3}{2}\cdot \text{Q}\left(\sqrt{\frac{4}{5}\cdot\frac{E_b}{N_0}}\right) \quad \text{et} \quad \Pr_{\text{MIA}-2}\{Ers\} = \text{Q}\left(\sqrt{2\cdot\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

La détection correcte des deux voies indépendantes correspond au produit des probabilités de décision correcte $\Pr_{\text{M}-\text{QAM}}\{Ers\} = 1-\Pr_{\text{MIA-2}}\{Dc\}\cdot\Pr_{\text{MIA-4}}\{Dc\} = \Pr_{\text{MIA-2}}\{Ers\}+\Pr_{\text{MIA-4}}\{Ers\}-\Pr_{\text{MIA-2}}\{Ers\}\cdot\Pr_{\text{MIA-4}}\{Ers\}$

Si le rapport signal à bruit n'est pas trop petit alors :

$$\Pr_{\text{MIA}-2}\{Ers\} \ll \Pr_{\text{MIA}-4}\{Ers\} \quad \text{et} \quad \Pr_{\text{M}-\text{QAM}}\{Ers\} \approx \Pr_{\text{MIA}-4}\{Ers\} = \frac{3}{2}\cdot \text{Q}\left(\sqrt{\frac{4}{5}\cdot\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

11. Calculer la DSP $S_x(f)$ de cette modulation.

$s(t) = \sum_k d_k \cdot g(t-kT_s)$ avec $d_k = d_{pk} + jd_{qk}$ suite de termes indépendants.

La formule de Bennett s'applique, la moyenne des d_k est nulle par raison de symétrie, il reste donc

$$S_s(f) = \frac{|G(f)|^2}{T_s}\cdot\sigma_d^2 \quad \text{avec ici} \quad \sigma_d^2 = E\left\{d_k^2\right\} = \left(4(1+1)+4(9+1)\right)\cdot\frac{1}{8} = 6$$

et $G(f) = \frac{A}{2}\cdot\left(\delta\left(f-\frac{1}{2T_s}\right)+\delta\left(f+\frac{1}{2T_s}\right)\right) * T_s\cdot\text{sinc}(\pi f T_s)$

Finalement : $S_x(f) = \frac{1}{2}\{S_s(f-f_0)+S_s(-f-f_0)\}$

B) MULTIPLEX.

On considère 30 voies de données à 1Mbit/s chacune. On les transmet par un multiplexage sur 100 porteuses orthogonales espacées deux à deux de 200kHz. Chaque porteuse est modulée par une MAQ-64 avec une rapidité de modulation de 200 kbaud.

La transmission se fait sur un canal dispersif non stationnaire où l' on a mesuré un étalement Doppler moyen $B_d = 100\text{Hz}$ et une dispersion moyenne des impulsions de $T_d = 3\mu\text{s}$.

1. Montrer que les porteuses sont orthogonales.

Supposant $f_0 \gg D_s$ ou $f_d = nD_s$, les porteuses sont orthogonales si elles sont espacées au minimum de $f_d = D_s = 200\text{kHz}$.

2. Quel est le débit binaire moyen sur chaque porteuse et quel est le débit binaire maximal que l' on peut transmettre avec ce multiplex?

La modulation est MAQ-64, avec $R = D_s = 200\text{kbaud}$. Le débit binaire est de $D_b = 1.2\text{Mbit/s}$.
Le dédit binaire maximal est $D_{b\max} = 1.2 \cdot 100 = 120\text{Mbit/s}$

3. En considérant le multiplex et le canal proposés, montrer que $L = 4$ est l' ordre de diversité maximal.

Les 30 voies de données représentent un débit global de 30Mbit/s, si chaque bit est répété 4 fois le débit devient 120Mbit/s qui est le débit maximal transmissible.

4. En considérant une seule porteuse MAQ-64, expliquer comment on peut faire de la diversité dans le temps. Préciser l' espacement minimal des données symbole et binaire.

La diversité dans le temps oblige à répéter les données à des instants différents espacés de plusieurs fois le temps de cohérence $T_c \approx 1/B_d = 0.01\text{s}$ Comme $T_s = 5\mu\text{s}$, il faut réémettre un symbole (contenant les mêmes bits) au minimum tous les $0.01/5 \cdot 10^{-6} = 2000\,\text{symboles}$.
Comme un symbole comprend 6 bits cela fait 12000bits d' espacement.

5. En considérant le multiplex et le canal proposés, expliquer comment on peut y faire de la diversité dans le temps. Préciser l' espacement minimal des données et leur répartition sur les différentes porteuses.

La diversité dans le temps oblige à répéter les données à des instants différents espacés de plusieurs fois le temps de cohérence $T_c \approx 1/B_d = 0.01$s

Le débit d' une voie passe de 1 à 4Mbit/s, elle doit donc être répartie sur plusieurs porteuses. La répartition du multiplex est arbitraire mais les quatre bits de la même donnée doivent rester sur la même voie et être espacés d' une durée supérieure au temps de cohérence du canal qui est de 12000bits. Il faut donc une mémoire d' au moins 48 000bits par voie.
On peut réaliser facilement le multiplex avec un entrelaceur à 30 entrées (1 par voie) et 100 sorties (1 par fréquence) les bits des sorties sont en suite regroupés par 6 pour former un symbole.

6. En considérant le multiplex et le canal proposés, expliquer comment on peut y faire de la diversité en fréquence. Préciser l' espacement minimal des données et leur répartition sur les différentes porteuses.

La diversité en fréquence oblige à répéter simultanément les mêmes données à des fréquences différentes espacées de plusieurs fois la bande de cohérence $B_c \approx 1/T_d \approx 333$kHz, si chaque donnée est répétée 4 fois on peut choisir un espacement de 25 porteuses.

On peut réaliser le multiplex avec un entrelaceur à 30 entrées et 25 sorties, sorties qui vont sur les porteuses 1 à 25 et simultanément sur les porteuses 26 à 50 et 51 à 75 et 76 à 100 en respectant l' ordre de croissance des fréquences.

30x1Mbps/6/25=200kbauds.
