CORRIGE du Contrôle2 de CN21 2002/2003

A) SIGNAUX ORTHOGONAUX.

On considère des données binaires, au débit D_b, à transmettre sur un canal dispersif à BABG de DSP bilatérale $N_0/2$. La transmission se fait à l'aide d'un multiplex (superposition) de quatre modulations MAQ-4 sur quatre porteuses espacées de $\Delta f = 1\text{MHz}$ la fréquence la plus basse étant $f_0 = 10\text{GHz}$. La sortie du multiplex constitue un symbole émis sur l'antenne. Les données binaires $\{d_l\}$ sont i.i.d équiprobables. Le canal à une bande de cohérence $B_{coh} \approx 2\text{MHz}$, et un étalement Doppler $B_{dop} \approx 1\text{kHz}$.

Les MAQ ont la même forme $g(t) = A \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{T_s}\right) \cdot \Pi_{T_s}(t)$

1. Quelle est la durée de l'IES provoquée par le canal.

$T_d \approx 1/B_{coh} = 0.5\mu\text{s}$

2. Combien de bits peut-on transmettre avec un symbole ?

4 fois 2 bits = 8 bits/symbole.

3. Donner la représentation mathématique d'un symbole émis à l'antenne.

$$s(t) = \sum_k \left(\sum_{i=0}^{3} \left(d_{pik} \cdot g(t-kT_s) \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\omega_i t) - d_{qik} \cdot g(t-kT_s) \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega_i t) \right) \right)$$

avec $\omega_i = 2\pi\left(f_0 + i\Delta f\right)$

4. Donner la représentation mathématique de son enveloppe complexe par rapport à f_0.

Enveloppe complexe par rapport à f_0 : $\alpha_s(t) = \sum_k \left(\sum_{i=0}^{3} \left(d_{pik} + j d_{qik} \right) \mathrm{e}^{j2\pi i \Delta f t} \cdot g(t-kT_s) \right)$

5. Quelles sont les conditions pour que les porteuses soient orthogonales ?

L'espacement $\Delta f = 1\text{MHz}$ doit être un multiple de la rapidité de modulation de la MAQ portée. Ceci fixe la rapidité d'une MAQ-4 qui est de 1 Mbaud soit 2 Mbits/s.

6. On suppose désormais ces conditions remplies. Quel est le débit symbole D_s ?

Pour la somme des quatre porteuses un symbole est à la même cadence de 1 Mbaud mais il y a 8 bits transmis par symbole soit un débit de 8Mbits/s

7. Exprimer l'énergie moyenne par symbole E_s en fonction de A et de T_s.

Les 4 symboles MAQ-4 sont identiques et équiprobables, l'énergie moyenne du symbole multiplex est quatre fois celle d'une MAQ-4 soit avec des bits à ± 1

$$E_s = 4 \cdot \mathrm{E}\left\{d_i^2\right\} \cdot \int |g(t)|^2 \, dt = 4 \cdot \frac{1}{4} 4 \left(1^2 + 1^2\right) \cdot A^2 T_s / 2 = 4 \cdot A^2 T_s$$

8. Donner une représentation vectorielle de cette modulation.

Sur chaque porteuse orthogonale la MAQ-4 à deux directions orthogonales ce qui fait en tout 8 directions orthogonales et sur chacune d'entre elles un bit peut prendre deux valeurs ± 1

Les vecteurs sont donc de la forme $\mathbf{s}_i = [\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1] \cdot \sqrt{\frac{E_s}{8}}$

$|\mathbf{s}_i|^2 = E_s$ puisqu'il y a $2^8 = 4^4$ vecteurs équiprobables : $\sum_{i=1}^{256} \frac{1}{256} |\mathbf{s}_i|^2 = E_s$.

La distance mini entre deux points est de $d_{\min} = 2\sqrt{\frac{E_s}{8}} = \sqrt{\frac{E_s}{2}}$.

9. Ces signaux ne sont pas bi-orthogonaux, donner en fonction de E_s / N_0 un majorant de la probabilité d' erreur que l' on peut espérer en réception.

Les points de la constellation ne sont pas sur les axes mais sur les sommets d' un hypercube tel que les axes passent au milieu des faces.

M=256, $\Pr\{Ers\} \le \sum_{i=1}^{256} \left(\sum_{j \ne i} Q\left(\sqrt{\frac{d_{ij}^2}{2N_0}} \right) \right) \cdot \frac{1}{256}$ chaque point à 8 voisins à $d_{\min}$ ce qui donne

pour la borne de l'union : $\Pr\{Ers\} \le 8 \cdot Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{4N_0}} \right)$

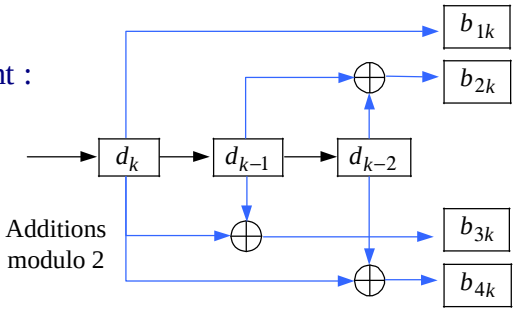
10. On désire faire une diversité d' ordre deux en fréquence, quel est le débit binaire maximal pour les données utilisateur?

Le débit utilisateur est divisé par deux il reste 4Mbits/s

11. Expliquer comment répartir les bits sur les porteuses.

Pour espérer des cœfficients indépendants il faut espacer les porteuses de plus de la bande de cohérence $B_{coh} \approx 2\text{MHz}$, les bits sont pris par paquets de 4 et répartis par exemple :
bit 1 sur porteuse 1 et 3, bit 2 sur porteuses 2 et 4,
bit 3 sur porteuse 1 et 3, bit 4 sur porteuses 2 et 4 .

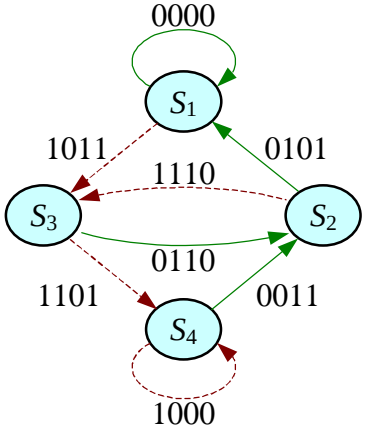
12. La diversité d' ordre deux n' étant pas suffisante, on y rajoute le codeur suivant :
A l' instant k le bit b_{1k} est émis sur les porteuses 1 et 3,
le bit b_{2k} est sur les porteuses 2 et 4,
le bit b_{3k} est sur les porteuses 1 et 3, etc….
Quel est alors le débit binaire maximal pour les données utilisateur?



Le rendement est $r = 1/4$, $D_b = 1\text{Mbit/s}$.

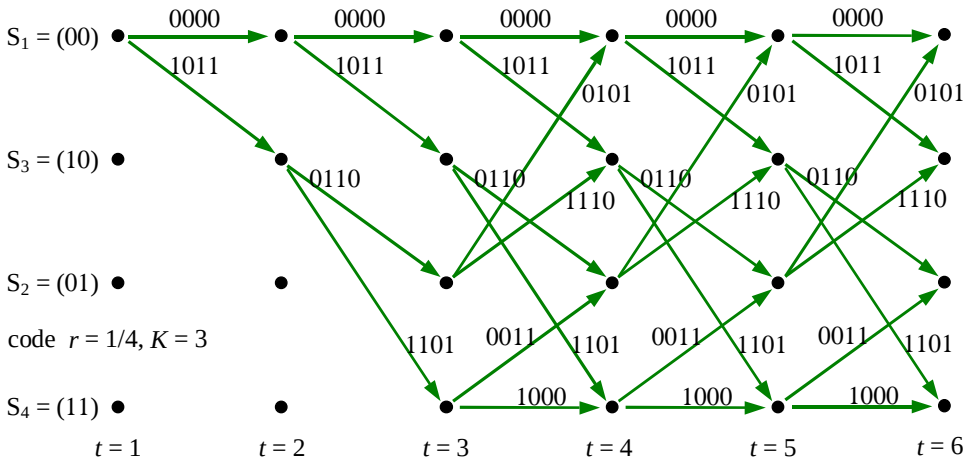
13. Représenter le diagramme d' état de ce codeur.

code (4, 1, 3)
n = 4, k = 1, K = 3
code r = 1/4, K = 3



S_1 = (00)
S_2 = (01)
S_3 = (10)
S_4 = (11)

14. Représenter le treillis de ce codeur.



B) DIVERSITE.

On réalise un système de communication avec émetteurs et deux antennes en émission et une seule en réception. Le canal est de Rayleigh et les antennes sont suffisament espacées pour réaliser la diversité d' ordre 2. Les gains des canaux sont indépendants, gaussiens complexes de même loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ et à variation lente tels que l' on puisse considérer que $c_k = c_{k+1}$.

Le bruit est BABG de DSP bilatérale $N_0/2$.

6. Donner les conditions pour que le canal soit un canal de Rayleigh.

Gains à variations lentes, largeur de bande inférieure à la bande de cohérence, trajets répartis uniforméments et pas de trajet prédominant.

7. Une seule antenne fonctionne en émission, la modulation est une MDP-2 la puissace émise P_e. Quelle est quelle est la probabilité d' erreur sur les bits restitués en fonction de P_e, D_b, N_0 ?

$$\gamma_n = \frac{E_{s,n}}{\sigma_b^2} = \frac{|c_n|^2 E_s}{N_0} = |c_n|^2 \cdot \frac{P_e}{D_b N_0} \quad \text{et} \quad d^2_{n\min} = 4|c_n|^2 E_s$$

$$\Pr_{\text{MDP-2}}\{Ers / c_n\} = \mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{d_n^2}{2N_0}}\right) = \mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{2\cdot|c_n|^2\cdot E_b}{N_0}}\right) = \mathrm{Q}\left(\sqrt{2\cdot\gamma_n}\right)$$

$$\Pr\{Ers\} = \int_0^{+\infty} Q\left(\sqrt{2x}\right)\cdot\frac{1}{\gamma}\cdot\exp\left(-\frac{x}{\gamma}\right)\cdot dx$$

8. Les deux antennes fonctionnent et on émet les symboles par paquets de deux de la façon suivante : (x_k, x_{k+1}^*) sur l' antenne 1 et (x_{k+1}, x_k^*) sur l' antenne 2 (ceci pendant la durée $2T_s$ des deux symboles), puis on recommence avec les deux symboles suivants (x_{k+2}, x_{k+3}^*) sur l' antenne 1 et (x_{k+3}, x_{k+2}^*) sur l' antenne 2 etc…

TSVP →

Le récepteur reçoit alors les symboles sucessifs :

$$r_k = c_{1,k}\,x_k + c_{2,k}\,x_{k+1}^* + n_k\,,$$

$$r_{k+1} = c_{1,k+1}\,x_{k+1} - c_{2,k+1}\,x_k^* + n_{k+1}\,,$$

$$r_{k+2} = c_{1,k+2}\,x_{k+2} + c_{2,k+2}\,x_{k+3}^* + n_{k+2}\,,\quad \text{etc …}$$

Quelle est la structure du récepteur qui permet de retrouver les symboles émis ?

Pour récupérer le premier bit on fait :

$$c_{1,k}^* \cdot r_k - \left(c_{2,k}^* \cdot r_{k+1}\right)^* = \left|c_{1,k}\right|^2 \cdot x_k + c_{1,k}^* \cdot n_k + \left|c_{2,k}\right|^2 \cdot x_k + c_{2,k} \cdot n_{k+1}^*$$

Pour récupérer le deuxième bit on fait :

$$c_{1,k}^* \cdot r_{k+1} + \left(c_{2,k}^* \cdot r_k\right)^* = \left|c_{1,k}\right|^2 \cdot x_{k+1} + c_{1,k}^* \cdot n_{k+1} + \left|c_{2,k}\right|^2 \cdot x_{k+1} + c_{2,k} \cdot n_k^*$$

9. Montrer que ce récepteur réalise la diversité d' ordre 2.

On récupère $\left(\left|c_{1,k}\right|^2 + \left|c_{2,k}\right|^2\right)\cdot x_k + c_{1,k}^* \cdot n_k + c_{2,k} \cdot n_{k+1}^*$ et

$$\left(\left|c_{1,k}\right|^2 + \left|c_{2,k}\right|^2\right)\cdot x_{k+1} + c_{1,k}^* \cdot n_{k+1} + c_{2,k} \cdot n_k^*$$

Ce qui est pour chaque symbole la forme de la variable de décision en diversité d'ordre 2.

10. Sur chaque antenne d' émission, les modulations sont des MDP-2 qui émettent la même puissance P_e. Avec le modem défini en 3 et 4, quelle est la probabilité d' erreur sur les bits restitués en fonction de P_e, D_b, N_0 ?

Probabilité en diversité d'ordre 2

$$\gamma_{1,k} = \left|c_{1,k}\right|^2 \frac{E_c}{N_0} = \left|c_{1,k}\right|^2 \frac{P_e}{D_b N_0} \qquad \gamma_k = \frac{\left|\mathbf{c}_k\right|^2 E_c}{N_0} = \left(\left|c_{1,k}\right|^2 + \left|c_{2,k}\right|^2\right)\frac{P_e}{D_b N_0} = \gamma_{1,k} + \gamma_{2,k}$$

$$\gamma = \mathrm{E}\left\{\gamma_{1,k}\right\} = \mathrm{E}\left\{\gamma_{2,k}\right\} = 2\sigma^2 \frac{P_e}{D_b N_0} \qquad p_{\gamma_k}(x) = p_{\gamma_{1,k}} * p_{\gamma_{2,k}} = \frac{x}{\gamma^2} \cdot \exp\left(-\frac{x}{\gamma}\right)\cdot \mathrm{u}(x)$$

$$\Pr\left\{Ers / \mathbf{c}_n\right\} = Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{2\left|\mathbf{c}_k\right|^2 \frac{E_c}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{2\gamma_k}\right)$$

$$\Pr\{Ers\} = \int_0^{+\infty} Q\left(\sqrt{2x}\right)\frac{x}{\gamma^2} \cdot \exp\left(-\frac{x}{\gamma}\right)dx = \frac{1}{2}(1\text{-}\mu) - \mu\left(\frac{1-\mu^2}{4}\right) \quad \text{avec} \quad \mu = \sqrt{\frac{\gamma}{1+\gamma}}$$