CORRIGE du Contrôle1 CN21 2003/2004

A) MODULATION MAQ.

On considère une source binaire, au débit de 10 Mbit/s. Les données binaires $\{b_l\}$ sont i.i.d équiprobables. La transmission se fait à l'aide d'une modulation de deux porteuses en quadrature à 4 états. Les porteuses sont à 2GHz.

Sur chaque voie les porteuses sont modulées par la forme $\pm g(t) = \pm A \cdot \Pi_{T_s}(t)$

1. Donner l'expression littérale, $x(t)$, de la modulation.

$$x(t) = \sum_k d_{pk} \cdot g(t - kT_s) \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\omega_0 t) - \sum_k d_{qk} \cdot g(t - kT_s) \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega_0 t)$$

2. Donner l'expression littérale, $\alpha_x(t)$, de son équivalent en Bande de Base.

$$\alpha_x(t) = \sum_k d_k \cdot g(t - kT_s) \quad \text{avec} \quad d_k = d_{pk} + j d_{qk}$$

3. Quel est le débit symbole D_s ? $D_s = D_b / \log_2 4 = 5\text{Mbauds}$

4. Donner une représentation vectorielle des symboles émis avec la base choisie.

$$\text{4 formes sur la base : } \psi_1(t) = \frac{\Pi_{T_s}(t)}{\sqrt{T_s}} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\omega_0 t) \; ; \; \psi_2(t) = \frac{\Pi_{T_s}(t)}{\sqrt{T_s}} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega_0 t)$$

$$\text{donnent les vecteurs : } \mathbf{s}_1 = \begin{vmatrix} +A\sqrt{T_s} \\ +A\sqrt{T_s} \end{vmatrix} \quad \mathbf{s}_2 = \begin{vmatrix} +A\sqrt{T_s} \\ -A\sqrt{T_s} \end{vmatrix} \quad \mathbf{s}_3 = \begin{vmatrix} -A\sqrt{T_s} \\ -A\sqrt{T_s} \end{vmatrix} \quad \mathbf{s}_4 = \begin{vmatrix} -A\sqrt{T_s} \\ +A\sqrt{T_s} \end{vmatrix}$$

Idem dans le plan complexe

5. Calculer l'énergie moyenne par symbole E_s en fonction de A et de T_s.

$$4 \cdot E_s = \sum_{i=1}^{4} |\alpha_i + j\beta_i|^2 \cdot \int |g(t)|^2 \, dt = \left((1+j)^2 + (1-j)^2 + (-1+j)^2 + (-1-j)^2 \right) \cdot E_g = 4 \cdot 2 \cdot E_g$$

$$E_s = 2 \cdot E_g = 2A^2 T_s$$

6. Dessiner la constellation de cette modulation.

7. Exprimer la distance minimale entre les points en fonction de l'énergie moyenne par bit E_b.

$$d^2_{\min} = 4A^2 T_s = 2E_s = 4E_b$$

8. Calculer la DSP $S_x(f)$ de cette modulation.

$$S_x(f)_{\text{MAQ-4 NRZ}} = A^2 T_s \cdot \left(\text{Sinc}^2\left(\pi (f - f_0) T_s\right) + \text{Sinc}^2\left(\pi (-f - f_0) T_s\right) \right)$$

9. On fait de l' étalement de spectre en multipliant chaque bit de chaque voie par une séquence de 4 chips NRZ (± 1). Les 4 chips $+-+-$ pour la voie en phase et les 4 chips $-++-$ pour la voie en quadrature. (on dira que T est la durée d' un chip)

Donner l' expression de l' équivalent en bande de base $\alpha_x(t)$.

Ce qui change est la forme $g(t)$ sur chaque voie, les chips sont 4 fois plus petits,

on a maintenant sur la voie en phase $g_p(t) = A\Pi_T(t) * \left(\delta(t) - \delta(t-T) + \delta(t+2T) - \delta(t+3T)\right)$

et sur la voie en quadrature $g_q(t) = A\Pi_T(t) * \left(-\delta(t) + \delta(t-T) + \delta(t+2T) - \delta(t+3T)\right)$

le signal émis est $x(t) = \sum_k d_{pk} \cdot g_p(t - kT_s) \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\omega_0 t) - \sum_k d_{qk} \cdot g_q(t - kT_s) \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega_0 t)$

l' équivalent en BdB $\alpha_x(t) = \sum_k d_{pk} \cdot g_p(t - kT_s) + j\sum_k d_{qk} \cdot g_q(t - kT_s)$

10. Calculer la DSP $S_x(f)$ du signal modulé $x(t)$. (Poser $u = \exp(-j2\pi fT)$, on a alors $u^* = u^{-1}$ et $u^3 + u^{-3} = 2 \cdot \cos\left(2\pi f 3T\right)$

Les données sont indépendantes on a donc la somme de deux MIA-2 indépendante la DSP est la somme des DSP

$$S_{\underset{\text{MAQ-4}}{\alpha_x}}(f) = S_{\underset{\text{MIA-2}}{\alpha_p}}(f) + S_{\underset{\text{MIA-2}}{\alpha_s}}(f) = \frac{\left|G_p(f)\right|^2}{T_s} + \frac{\left|G_q(f)\right|^2}{T_s}$$

$$S_{\underset{\text{MIA-2}}{\alpha_p}}(f) = \frac{\left|G_p(f)\right|^2}{T_s} = \frac{A^2T^2}{T_s} \cdot \text{Sinc}^2(\pi fT) \cdot \left|1 - e^{-j2\pi fT} + e^{-j2\pi f2T} - e^{-j2\pi f3T}\right|^2$$

$$S_{\underset{\text{MIA-2}}{\alpha_p}}(f) = \frac{\left|G_p(f)\right|^2}{T_s} = \frac{A^2T^2}{4T} \cdot \text{Sinc}^2(\pi fT) \cdot \left|1 - u + u^2 - u^3\right|^2$$

$$\left|1 - u + u^2 - u^3\right|^2 = -u^{-3} + 2u^{-2} - 3u^{-1} + 4 - 3u + 2u^2 - u^3$$
$$= 4 - 6\cos 2\pi fT + 4\cos 2\pi f2T - 2\cos 2\pi f3T$$

de même

$$S_{\underset{\text{MIA-2}}{\alpha_q}}(f) = \frac{\left|G_q(f)\right|^2}{T_s} = \frac{A^2T^2}{4T} \cdot \text{Sinc}^2(\pi fT) \cdot \left|-1 + u + u^2 - u^3\right|^2$$

$$\left|-1 + u + u^2 - u^3\right|^2 = +u^{-3} - 2u^{-2} - u^{-1} + 4 - u - 2u^2 + u^3$$
$$= 4 - 2\cos 2\pi fT - 4\cos 2\pi f2T + 2\cos 2\pi f3T$$

au total $$S_{\underset{\text{MAQ-4}}{\alpha_x}}(f) = S_{\underset{\text{MIA-2}}{\alpha_p}}(f) + S_{\underset{\text{MIA-2}}{\alpha_s}}(f) = \frac{A^2T^2}{4T} \cdot \text{Sinc}^2(\pi fT) \cdot \left(8 - 8\cos 2\pi fT + 0 - 0\right)$$
$$= 2A^2T \cdot \text{Sinc}^2(\pi fT) \cdot \sin^2(\pi fT) \cdot$$

B) CONSTELLATION.

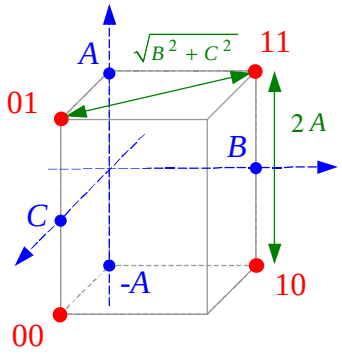
On émet une suite binaire i.i.d $\{+1,-1\}$, de probabilités respectives p et $1-p$, à l' aide de trois fréquences porteuses à $\{f_1 = f_0 - \Delta f,\ f_0,\ f_2 = f_0 + \Delta f\}$ qui sont modulées par du NRZ $g(t) = \Pi_{T_s}(t)$. On suppose les fréquences grandes devant le débit symbole de façon à admettre l' orthogonalité des formes.

Chaque symbole est formé de deux bits, le premier bit module directement la porteuse à f_0 {amplitudes $\pm Ag(t)$}, si le second bit est à $+1$ on émet la porteuse à f_2 {l'amplitude est $+Bg(t)$} en même temps que la porteuse à f_0, si le second bit est à -1 on émet la porteuse à f_1 {l'amplitude est $+Cg(t)$} en même temps que la porteuse à f_0.

1. Quel est le nombre d' états d' un symbole?

   4 états car deux bits indépendants.

2. Dessiner la constellation de cette modulation en indiquant un codage de Gray. (à T_s près)



3. Calculer l' énergie moyenne par bit en fonction de A de B de C et de p.

Deux points sont à la distance $\frac{d^2}{T_s} = \frac{A^2+B^2}{2}$ du centre les deux autres à la distance $\frac{d^2}{T_s} = \frac{A^2+C^2}{2}$

$$E_s = \frac{A^2+B^2}{2} T_s \left\{p^2 + (1-p)\,p\right\} + \frac{A^2+C^2}{2} T_s \left\{p(1-p) + (1-p)^2\right\}$$

$$E_s = \frac{A^2+B^2}{2} T_s\, p + \frac{A^2+C^2}{2} T_s\,(1-p) = \frac{T_s}{2}\left(A^2 + B^2 p + C^2(1-p)\right)$$

4. Quelle est la distance minimale entre les points? $d_{\min} = \sqrt{B^2+C^2}\sqrt{T_s}$

C) CANAL DE RAYLEIGH & DIVERSITE.

On transmet des données à 1Gbit/s sur un canal dispersif. On les transmet en les répartissant sur 100 porteuses orthogonales espacées deux à deux de 2.5MHz. Chaque porteuse est modulée par une MAQ-16.

La transmission se fait sur un canal dispersif non stationnaire où la fonction de diffusion fait apparaître un étalement Doppler moyen $B_d = 50\text{Hz}$ et une dispersion moyenne des impulsions de $T_d = 50\text{ns}$.

1. Quel sont les débits binaire et symbole sur chaque porteuse?

   1Gbps sur 100 porteuses donne 10Mbps par porteuse.

   MAQ-16 = 4 bits par porteuse $D_s = D_b / 4 = 2.5$ Mbaud

2. On veut faire de la diversité en fréquence, quel est l' ordre de diversité maximal envisageable?

   La largeur de bande du multiplex est de $100 \cdot 2.5 = 250\text{MHz}$.

   La bande de cohérence du canal est $B_c \approx 1/T_d = 20\text{MHz}$.

   En séparant les données de seulement la bande de cohérence $250/20 = 12.5$ on peut faire une diversité de $L = 12$.

3. On choisit un ordre de 5, de combien doit-on réduire le débit binaire de départ? D'un facteur 5.

4. Expliquer alors comment répartir les données.

Dupliquer chaque bit 5 fois et espacer ces données de $250/5 = 50\text{MHz}$.

5. Représenter le récepteur optimal sur une voie MAQ-16.

6. La transmission est perturbée par un BABG de DSP $N_0/2$, quelle est la probabilité d'erreur moyenne sur une voie MAQ-16 si le canal est stationnaire de gain constant ρ_n.

$$\underset{16-\text{QAM}}{\Pr\{Ers\}} = 2\underset{\sqrt{16}-\text{PAM}}{\Pr\{Ers\}} - \left(\underset{\sqrt{16}-\text{PAM}}{\Pr\{Ers\}}\right)^2 \approx 2\underset{4-\text{PAM}}{\Pr\{Ers\}} = 4\cdot\frac{4-1}{4}\cdot Q\left(\sqrt{\rho_n^2\frac{E_b}{N_0}\cdot\frac{6\log_2 4}{15}}\right) = 3\cdot Q\left(\sqrt{\rho_n^2\frac{E_b}{N_0}\cdot\frac{12}{15}}\right)$$

7. Le canal n'est ni stationnaire ni dispersif, quelle est alors la probabilité d'erreur moyenne?

   C'est un canal de Rayleigh de temps de cohérence $T_c \approx 1/B_d = 20\text{ms}$, la probabilité d'erreur se moyenne suivant la loi de $\gamma_n = \rho_n^2\frac{E_b}{N_0}$ qui est une loi exponentielle $p_{\gamma_n}(x) = \frac{1}{\gamma}\cdot\exp\left(-\frac{x}{\gamma}\right)\cdot u(x)$

   Ce qui donne $\Pr\{Ers\} = 3\int_0^{+\infty} Q\left(\sqrt{\frac{12}{15}x}\right)\cdot\frac{1}{\gamma}\cdot\exp\left(-\frac{x}{\gamma}\right)\cdot dx$

8. On fait de la diversité d'ordre 5 en fréquence, quelle est la probabilité pour que les 5 voies s'évanouissent simultanément ? (On dit qu'une voie s'évanouit si son gain ρ^2 est inférieur au centième de sa moyenne, $E\{\rho^2\}/100$).

Les voies sont indépendantes et supposées de même loi, c'est donc le produit des probabilités

$$P_{out} = \left(P_r\{\gamma_n \le \gamma/100\}\right)^5$$

$$P_r\{\gamma_n \le \gamma/100\} = \int_0^{\gamma/100} \frac{1}{\gamma}\cdot\exp\left(-\frac{x}{\gamma}\right)\cdot dx = \left[-\exp\left(-\frac{x}{\gamma}\right)\right]_0^{\gamma/100} = 1-e^{-0.01} = 0.01$$

soit $P_{out} = 10^{-10}$
