Corrigé du Contrôle2 CN21 2003/2004

A) MODULATION MAQ.

On considère une source binaire, au débit de D_b bit/s. Les données binaires $\{b_l\}$ sont i.i.d équiprobables. La transmission se fait sur un canal à évanouissements de gain instantané $\rho_n = |c_n|$ le bruit et BABG de DSP $N_0/2$. Pour maintenir une bonne qualité on change de modulation en fonction du gain du canal. On choisit pour cela des MAQ rectangulaires $g(t) = A \cdot \Pi_{T_s}(t)$, la fréquence porteuse est $f_0 \gg D_b$.

On considérera ici trois modulations MIA-2, MAQ-4 et MAQ-16.

La puissance émise P_e est la même dans chacun des trois cas.

1. Donner l'expression littérale, $x(t)$, de la modulation MAQ-4 et de son équivalent BdB.

$$x(t) = \sum_k d_{pk} \cdot g(t - kT_s) \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\omega_0 t) - \sum_k d_{qk} \cdot g(t - kT_s) \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega_0 t)$$

son équivalent en Bande de Base : $\alpha_x(t) = \sum_k d_k \cdot g(t - kT_s)$ avec $d_k = d_{pk} + j d_{qk}$

2. Quel est le débit symbole D_s pour chacune des trois modulations? (exemple $D_b = 10\text{Mbauds}$)

$$\underset{\text{MIA2}}{D_s} = D_b, \quad \underset{\text{MAQ4}}{D_s} = D_b / \log_2 4 = 5\text{Mbauds}, \quad \underset{\text{MAQ16}}{D_s} = D_b / \log_2 16 = 2.5\text{Mbauds}$$

3. Dans les cas MIA-2 et MAQ-16 exprimer les symboles émis sous forme de vecteurs.

MIA-2 : 2 formes sur la base : $\psi_1(t) = \dfrac{\Pi_{T_s}(t)}{\sqrt{T_s}} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\omega_0 t)$; donnent les vecteurs : $\mathbf{s}_i \in \left\{ \pm A\sqrt{T_s} \right\}$

MAQ-16 :16 formes sur la base : $\psi_1(t) = \dfrac{\Pi_{T_s}(t)}{\sqrt{T_s}} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\omega_0 t)$; $\psi_2(t) = \dfrac{\Pi_{T_s}(t)}{\sqrt{T_s}} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega_0 t)$

donnent les vecteurs : $\mathbf{s}_i \in \left\{ \begin{vmatrix} \pm A\sqrt{T_s} \\ \pm A\sqrt{T_s} \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} \pm 3A\sqrt{T_s} \\ \pm 3A\sqrt{T_s} \end{vmatrix} \right\}$

Idem en nombres complexes $s_i \in \left\{ (\pm\alpha_i \pm j\beta_i) \cdot A\sqrt{T_s} \right\}; \alpha_i, \beta_i = 1 \text{ ou } 3$.

4. Dessiner les trois constellations de ces modulations, préciser les amplitudes.

5. Dans les trois cas, calculer l'énergie moyenne par symbole E_s en fonction de A et de T_s.

$$E_s = \mathrm{E}\left\{ |\mathbf{s}_i|^2 \right\} = \mathrm{E}\left\{ |\alpha_i + j\beta_i|^2 \right\} \cdot A^2 T_s = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} |\alpha_i + j\beta_i|^2 \cdot A^2 T_s$$

$$\text{MIA2 : } E_s = \frac{1}{2}\left(|1|^2 + |-1|^2 \right) \cdot A^2 T_s = A^2 T_s$$

$$\text{MAQ4 : } E_s = \frac{1}{4}\left(|1+j|^2 + |1-j|^2 + |-1+j|^2 + |-1-j|^2 \right) \cdot A^2 T_s = 2A^2 T_s$$

$$\text{MAQ16 : } E_s = \frac{1}{16}\left(|1+j|^2 + |3+j|^2 + \ldots + |-3-3j|^2 \right) A^2 T_s = \frac{1}{16}(2 \cdot 4 + 10 \cdot 8 + 18 \cdot 4) A^2 T_s = 10 A^2 T_s$$

6. Exprimer, pour les trois, la distance minimale entre les points en fonction de l'énergie moyenne par symbole E_s puis de la puissance émise P_e et du débit binaire D_b.

$$\text{MIA2}: \; d_{\min}^2 = 4A^2T_s = 4E_s = 4E_b = 4P_e / D_b$$
$$\text{MAQ4}: \; d_{\min}^2 = 4A^2T_s = 2E_s = 4E_b = 4P_e / D_b$$
$$\text{MAQ16}: \; d_{\min}^2 = 4A^2T_s = \frac{4}{10}E_s = \frac{2}{5}4E_b = \frac{8}{5}P_e / D_b$$

7. Quelles sont les probabilités d'erreur par symbole de ces trois modulations lorsque le canal pondère l'amplitude du signal émis par le facteur ρ_n (approximation du premier ordre).

$$\Pr_{\text{MIA-2}}\{Ers\} = Q\left(\sqrt{\rho_n^2 \cdot 2 \cdot \frac{E_b}{N_0}}\right); \quad \Pr_{\text{MAQ-4}}\{Ers\} \approx 2 \cdot Q\left(\sqrt{\rho_n^2 \cdot \frac{E_b}{N_0} \cdot 2}\right); \quad \Pr_{\text{MAQ-16}}\{Ers\} \approx 3 \cdot Q\left(\sqrt{\rho_n^2 \cdot \frac{E_b}{N_0} \cdot \frac{12}{15}}\right)$$

8. On fait un codage de Gray et on suppose que les erreurs ne se font que sur les voisins immédiats, quelle est alors la probabilité d'erreur par bit?

$$\Pr_{\text{MIA-2}}\{Erb\} = \Pr_{\text{MIA-2}}\{Ers\}; \quad \Pr_{\text{MAQ-4}}\{Erb\} = \frac{1}{2} \cdot \Pr_{\text{MAQ-4}}\{Ers\}; \quad \Pr_{\text{MAQ-16}}\{Erb\} = \frac{1}{4} \cdot \Pr_{\text{MAQ-16}}\{Ers\}.$$

B) CANAL DE RAYLEIGH.

On transmet des données sur un canal radio à la fréquence porteuse $f_0 = 10\text{GHz}$, le canal suit un modèle de Rayleigh, on a estimé sa bande de cohérence à $B_c = 10\text{MHz}$ et son étalement Doppler à $B_d = 500\text{Hz}$.

1. Pour un mobile quel serait le glissement Doppler maximum si la vitesse de déplacement radiale pouvait atteindre 108km/h?

108km/h=30m/s ; écart Doppler $\Delta f = f_0 \cdot \frac{v}{c} = 10^{10} \cdot \frac{30}{3 \cdot 10^8} = 1\text{kHz}$

2. On considère que le canal est à variations lentes si le temps de cohérence est supérieur à 100 fois la durée d'un symbole. Quel débit binaire D_b peut-on alors écouler avec une modulation MAQ-16?

$$T_c = \frac{1}{f_d} = \frac{1}{500} > 100T_s = 400T_b \quad \rightarrow \quad T_b < \frac{1}{20 \cdot 10^4} \quad \rightarrow \quad D_b > 200\text{kbit/s}$$

3. Pour réaliser un intervalle de garde, la dispersion du canal ne doit pas dépasser 20% de la durée du symbole, quel est alors le débit binaire maximum que l'on peut écouler avec une MAQ-16?

$T_d < \frac{2}{10}T_s \quad \rightarrow \quad D_s < \frac{2}{10}B_c \quad \rightarrow \quad D_b = 4D_s < \frac{8}{10}10 \cdot 10^6 = 8\text{Mbit/s}$. Pour que le canal soit de Rayleigh il faut respecter au minimum $B_c > 2D_s$ en modulation non filtrée.

4. Quelle est la probabilité pour que le gain ρ_n du canal soit inférieur à une valeur α ? (ρ_n suit une loi de Rayleigh de moyenne $E\{\rho_n\}=\sigma\sqrt{\pi/2}$)

$$f_{\rho_n}(x)=\frac{x}{\sigma^2}\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\cdot u(x);\qquad \Pr\{\rho_n<\alpha\}=\int_0^{\alpha}\frac{x}{\sigma^2}\cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\cdot dx=\left[-e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right]_0^{\alpha}=1-e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}}$$

5. Le gain en puissance $\eta_n=\rho_n^2$ suit une loi exponentielle de moyenne $E\{\eta_n\}=\eta=2\sigma^2$. Quelle est la probabilité pour que η_n soit inférieur à une valeur β ? Comparer β et α.

$$f_{\eta_n}(x)=\frac{1}{\eta}\cdot\exp\left(-\frac{x}{\eta}\right)\cdot u(x)\qquad\qquad \beta=\alpha^2$$

$$\Pr\{\eta_n<\beta\}=\int_0^{\beta}\frac{1}{\eta}\cdot\exp\left(-\frac{x}{\eta}\right)\cdot dx=\left[-e^{-\frac{x}{\eta}}\right]_0^{\beta}=1-e^{-\frac{\beta}{\eta}}$$

C) PORTEUSES ORTHOGONALES.

On transmet des données binaires (i.i.d. équiprobables, D_b) sur un canal radio à l'aide de modulations numériques sur 10 porteuses espacées de $\Delta f=R$ de façon à ce que les signaux soient orthogonaux.

A chaque porteuse correspond un canal de Rayleigh. Ces canaux sont de même loi ($\eta=1$) et indépendants entre eux. Chaque porteuse est émise avec une puissance de 10mW.

Le BABG de réception est de niveau $N_0=-120\text{dB}$.

Pour garantir une bonne qualité de transmission on change la modulation d'un canal lorsqu'il se dégrade (mesure de la puissance instantanée reçue). On utilise les trois modulations du A).

1. Quelle est, en fonction du rapport signal à bruit moyen $\gamma=\eta\frac{E_b}{N_0}$, la probabilité d'erreur moyenne par symbole d'une MIA-2 sur un canal de Rayleigh ?

$$\Pr\{Ers\}=\int_0^{+\infty}Q\left(\sqrt{2x}\right)\cdot\frac{1}{\gamma}\cdot\exp\left(-\frac{x}{\gamma}\right)\cdot dx=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{\gamma}{1+\gamma}}\right)\xrightarrow{\gamma\to\infty}\frac{1}{4\gamma}$$

2. Même question pour la MAQ-4 et la MAQ-16, valeurs asymptotiques ? (Utiliser A7).

Proba instantannées :

$$\underset{\text{MIA-2}}{\Pr\{Ers\}}=Q\left(\sqrt{2\gamma_n}\right);\qquad \underset{\text{MAQ-4}}{\Pr\{Ers\}}\approx 2\cdot Q\left(\sqrt{2\gamma_n}\right);\qquad \underset{\text{MAQ-16}}{\Pr\{Ers\}}\approx 3\cdot Q\left(\sqrt{2\gamma_n\cdot\frac{6}{15}}\right)$$

Proba moyennes : $\underset{\text{MIA-2}}{\Pr\{Ers\}}\approx\frac{1}{4\gamma};\qquad \underset{\text{MAQ-4}}{\Pr\{Ers\}}\approx 2\cdot\frac{1}{4\gamma};$

avec $2\gamma_n' = 2\gamma_n \cdot \frac{6}{15}$ on a $\underset{\text{MAQ-16}}{\Pr\{Ers\}} \approx 3 \cdot \frac{1}{4\gamma'} = 3 \cdot \frac{15}{4 \cdot 6 \cdot \gamma} = \frac{15}{8\gamma}$

3. On veut assurer une probabilité d'erreur moyenne par bit de 10^{-4}. Déterminer les valeurs $\gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3$ du rapport S/B nécessaire pour chacune de ces trois modulations. (Linéaire et dB).

$\underset{\text{MIA-2}}{\Pr\{Ers\}} \approx \frac{1}{4\gamma} = 10^{-4} \quad \rightarrow \quad \gamma = 25 \cdot 10^2 \quad \rightarrow \quad \gamma_1 \approx 34\,\text{dB}$

$\underset{\text{MAQ-4}}{\Pr\{Ers\}} \approx 2 \cdot \frac{1}{4\gamma} = 10^{-4} \quad \rightarrow \quad \gamma = 50 \cdot 10^2 \quad \rightarrow \quad \gamma_2 \approx 37\,\text{dB}\,;$

$\underset{\text{MAQ-16}}{\Pr\{Ers\}} \approx \frac{15}{8\gamma} = 10^{-4} \quad \rightarrow \quad \gamma = 1.88 \cdot 10^4 \quad \rightarrow \quad \gamma_3 \approx 42.7\,\text{dB}$

4. En déduire les valeurs moyennes $\rho_1^2 < \rho_2^2 < \rho_3^2$ du gain instantané ρ_n^2 du canal.

$\gamma = \eta \frac{E_b}{N_0}$ et $\gamma_n = \rho_n^2 \frac{E_b}{N_0}$; $P_e = E_b D_b$; $\rho_{moyen}^2 = \gamma \frac{N_0 D_b}{P_e}$

Soit en décibel $\underset{\text{dB}}{2\rho_{moyen}} = \gamma + N_0 + D_b - P_e$

Soit en décibel $2\rho_1 = 34 - 120 + 60 + 20 = -6\text{dB} \rightarrow \eta_1 = 0.25$

Soit en décibel $2\rho_2 = 37 - 120 + 60 + 20 = -3\text{dB} \rightarrow \eta_2 = 0.5$

Soit en décibel $2\rho_3 = 42.7 - 120 + 60 + 20 = +2.7\text{dB} \rightarrow \eta_3 = 1.87$

5. Quelles sont les probabilités pour que le gain du canal η_n soit inférieur aux valeurs η_1, η_2, η_3 ?

$\eta = 1\,;\quad \Pr\{\eta_n < \eta_1\} = 1 - \text{e}^{-\frac{\eta_1}{\eta}} = 0.22\,;\quad \Pr\{\eta_n < \eta_2\} = 1 - \text{e}^{-\frac{\eta_2}{\eta}} = 0.39\,;\quad \Pr\{\eta_n < \eta_3\} = 0.85$

6. Sur chaque porteuse, on ne transmet pas de donnée si le taux d'erreur de 10^{-4} n'est pas assuré. Quelles sont alors les probabilités d'utiliser chacune des trois modulations ?

On utilise la MAQ-16 si $\Pr\{\eta_n > \eta_3\} = 1 - 0.85 = 0.15$

On utilise la MAQ-4 si $\Pr\{\eta_2 < \eta_n < \eta_3\} = 0.85 - 0.39 = 0.46$

On utilise la MIA-2 si $\Pr\{\eta_1 < \eta_n < \eta_2\} = 0.39 - 0.22 = 0.17$

On ne transmet pas si $\Pr\{\eta_n < \eta_1\} = 0.22$

7. Quel est le débit binaire moyen résultant sur l'ensemble des 10 porteuses ?

Sur une porteuse le débit moyen résultant est :

$D_b = 0 \cdot 0.22 + R \cdot 0.17 + 2 \cdot R \cdot 0.46 + 4 \cdot R \cdot 0.15 = 1.69 \cdot R = 1.69\text{Mbit/s}$

Les canaux étant indépendants, le débit moyen global pour assurer un taux d'erreur de 10^{-4} est de $D_b = 16.9\text{Mbit/s}$
