CORRIGE du Contrôle1 CN21 2004/2005

A) CODAGE.

On considère une source binaire, au débit de 10 Mbit/s. Les données binaires $\{b_k\}$ sont i.i.d à valeurs $b_k \in \{\pm 1\}$ de probabilité $\Pr\{b_k = +1\} = p$.

On code cette source pour obtenir la suite quaternaire $\{a_k\}$, la règle de codage est : $a_k = a_{k-1} + b_k$ (modulo 4).

Exemple :

La suite :	1	1	1	1	1	-1	-1	1
donne	0	1	2	3	0	1	0	3	0

.

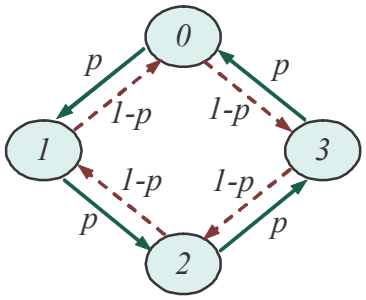
1. Coder la suite : -1 -1 -1 -1 -1 1 1 -1 1 1 . En partant de 0.

La suite :		-1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1
donne	0	3	2	1	0	3	0	1	0	1	2

2. Ce codage est représentable par un graphe markovien à quatre états $\{0,1,2,3\}$.

Dessiner ce graphe. Donner la matrice des probabilités de transitions en fonction de p.

↙	0	1	2	3
0	0	$1-p$	0	p
1	p	0	$1-p$	0
2	0	p	0	$1-p$
3	$1-p$	0	p	0



3. Calculer $\Pr\{a_k = 3 \text{ et } a_{k-2} = 0\}$ et $\Pr\{a_k = 2 \text{ et } a_{k-2} = 0\}$.

$$\Pr\{a_k = 3 \text{ et } a_{k-2} = 0\} = \sum_{i=0 \text{ à } 3} \Pr\{a_k = 3 \text{ et } a_{k-1} = i \text{ et } a_{k-2} = 0\}$$
$$= \sum_{i=0 \text{ à } 3} \Pr\{a_k = 3 / a_{k-1} = i \text{ et } a_{k-2} = 0\} \cdot \Pr\{a_{k-1} = i \text{ et } a_{k-2} = 0\}$$
$$= \sum_{i=0 \text{ à } 3} \Pr\{a_k = 3 / a_{k-1} = i \} \cdot \Pr\{a_{k-1} = i / a_{k-2} = 0\} \cdot \Pr\{a_{k-2} = 0\}$$
$$= \left(\Pr\{a_k = 3 / a_{k-1} = 3 \} \cdot \Pr\{a_{k-1} = 3 / a_{k-2} = 0\} + \Pr\{a_k = 3 / a_{k-1} = 1 \} \cdot \Pr\{a_{k-1} = 1 / a_{k-2} = 0\}\right) \cdot 1/4$$
$$= 0$$

$$\Pr\{a_k = 2 \text{ et } a_{k-2} = 0\} = \sum_{i=0 \text{ à } 3} \Pr\{a_k = 2 \text{ et } a_{k-1} = i \text{ et } a_{k-2} = 0\}$$
$$= \sum_{i=0 \text{ à } 3} \Pr\{a_k = 2 / a_{k-1} = i \} \cdot \Pr\{a_{k-1} = i / a_{k-2} = 0\} \cdot \Pr\{a_{k-2} = 0\}$$
$$= \left(\Pr\{a_k = 2 / a_{k-1} = 3 \} \cdot \Pr\{a_{k-1} = 3 / a_{k-2} = 0\} + \Pr\{a_k = 2 / a_{k-1} = 1 \} \cdot \Pr\{a_{k-1} = 1 / a_{k-2} = 0\}\right) \cdot 1/4$$
$$= \left(p \cdot p + (1-p) \cdot (1-p)\right) \cdot 1/4$$

B) MODULATION.

On considère une source stationnaire $\{a_k\}$, au débit de 10 MSymbole/s. Les données $\{a_k\}$ sont i.i.d à valeurs $a_k \in \{0,1,2,3\}$ équiprobables.

On transmet cette source sous la forme modulée :

$$x(t) = \sum_k \sqrt{2}\cos\left(2\pi f_0 t + \tfrac{\pi}{2}\cdot a_k\right)\cdot g(t-kT_s), \qquad \text{avec } g(t) = A\cdot \Pi_{T_s}(t)$$

4. Donner l'équivalent BdB de cette modulation.

$$x(t) = \sum_k \cos\left(\tfrac{\pi}{2}\cdot a_k\right)\sqrt{2}\cos(2\pi f_0 t) - \sin\left(\tfrac{\pi}{2}\cdot a_k\right)\sqrt{2}\sin(2\pi f_0 t)\cdot g(t-kT_s)$$

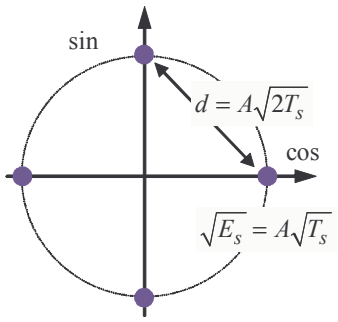
$$\alpha_x(t) = \sum_k \left(\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\cdot a_k\right) + j\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\cdot a_k\right)\right)\cdot g(t-kT_s) = \sum_k \exp\left(j\tfrac{\pi}{2}\cdot a_k\right)\cdot g(t-kT_s)$$

5. Calculer l'énergie moyenne par symbole E_s en fonction de A et de T_s.

Il y a 4 formes possibles pour un symbole : $\alpha_i(t) = \exp\left(j\tfrac{\pi}{2}\cdot i\right)\cdot A\cdot \Pi_{T_s}(t);\ i = 0,1,2,3$

Les formes sont équiprobables $E_s = \mathrm{E}\{E_i\} = \sum_{i=1}^{4} A^2 T_s \cdot \frac{1}{4} = A^2 T_s$

6. Dessiner la constellation de cette modulation.



7. Exprimer la distance minimale entre les points en fonction de l'énergie moyenne par symbole.

$$d_{\min} = A\sqrt{2T_s} = \sqrt{2E_s}$$

8. Calculer la DSP $S_x(f)$ de cette modulation. La dessiner.

DSP d'une modulation MDP-4 symboles i.i.d et états équiprobables de moyenne nulle.

La DSP en équivalent en bande de base est définie par :

$$S_{\alpha_x}(f) = \frac{|G(f)|^2}{T_s}\cdot\left(\mathrm{E}\left\{\left|\exp\left(j\tfrac{\pi}{2}\cdot a_k\right)\right|^2\right\}\right) = A^2 T_s\cdot \mathrm{sinc}^2(\pi f T_s)$$

La DSP du signal réel passe bande est définie par : $S_x(f) = \frac{1}{2}\cdot\left\{S_{\alpha_x}(f-f_c) + S_{\alpha_x}(-f-f_c)\right\}$

C) CANAL DISPERSIF.

On veut transmettre une source binaire, au débit $D_b = 160\text{Mbit/s}$, à l'aide d'une modulation MAQ-16 filtrée en cosinus surélevé de facteur de roll-off $\alpha = 0.5$. La porteuse est à $f_0 = 3\text{GHz}$. La transmission se fait sur un canal mobile dispersif. Le mobile peut atteindre une vitesse maximum de 360km/h.

9. Quel est l'étalement doppler maximum ? $f_d = f_0 \cdot \frac{v}{c} = 3 \cdot 10^9 \frac{100}{3 \cdot 10^8} = 1\text{kHz}$

10. Quelles sont les conditions pour considérer que la transmission suit un modèle de Rayleigh ?

Pas de trajet direct, répartition uniforme des trajets, gains gaussiens complexes, bande de cohérence supérieure à la bande du signal, variations lentes.

Ici le temps de cohérence du canal est de l'ordre de la milliseconde, ce qui est bien supérieur à la durée d'un symbole qui est de 25ns.

11. On a aussi observé que l'étalement moyen des impulsions ne dépasse pas le cinquième de la durée T_s d'un symbole transmis. Ceci permet d'envisager la transmission avec un intervalle de garde. Peut on transmettre la source binaire sur ce canal de Rayleigh ?

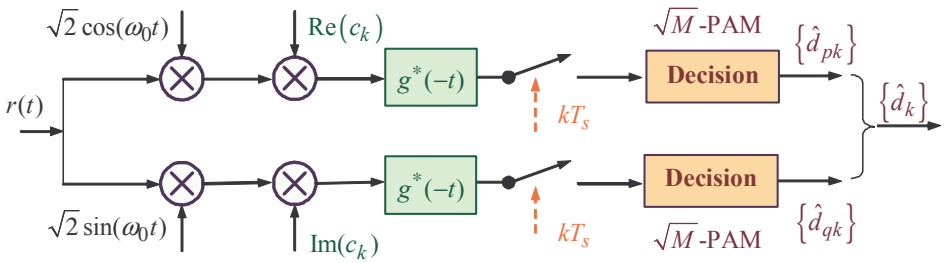
La bande de cohérence est $B_c \approx 1/T_d = 1/5 \cdot 10^{-9} = 200\text{MHz}$.

La largeur du spectre du signal est $B = R \cdot (1+\alpha) = 1{,}5R = 1{,}5 \cdot 40 \cdot 10^6 = 60\text{MHz}$

$B < B_c$ on est bien dans les conditions d'un canal de Rayleigh.

12. Quel est alors le récepteur optimal de la modulation MAQ-16 (pas en équivalent BdB) ?

$M = 16$



D) CANAL DE RAYLEIGH.

On transmet des données à l'aide d'une MAQ-16 sur un canal de Rayleigh variant lentement au cours du temps. La puissance émise est P_e. Les coefficients complexes c_k, du canal discret, suivent une loi gaussienne centré de variance σ^2. Le récepteur est optimal BABG. Le bruit réel est de DSP bilatérale $N_0/2$.

13. Exprimer la probabilité d'erreur instantanée de la modulation MAQ-16 , en fonction de c_k, N_0, P_e, D_b ?

La probabilité d'erreur instantanée est celle d'une MAQ-16 affectée d'un gain c_k .

$$\Pr_{\text{M-QAM}}\{Ers\} = 1 - \Pr_{\text{M-QAM}}\{Dc\} = 1 - \left(\Pr_{\sqrt{M}\text{-PAM}}\{Dc\}\right)^2 = 1 - \left(1 - \Pr_{\sqrt{M}\text{-PAM}}\{Ers\}\right)^2 \approx 2 \cdot \Pr_{\sqrt{M}\text{-PAM}}\{Ers\}$$

$$\Pr_{M\text{-PAM}}\{Ers\} = 2 \cdot \frac{M-1}{M} \cdot Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0} \cdot \frac{6\log_2 M}{M^2-1}}\right)$$

$$\Pr_{16\text{-QAM}}\{Ers\} \approx 4 \cdot \frac{\sqrt{16}-1}{\sqrt{16}} \cdot Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0} \cdot \frac{6\log_2 \sqrt{16}}{16-1}}\right) = 3 \cdot Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0} \cdot \frac{12}{15}}\right)$$

avec $E_b = P_e \cdot |c_k|^2 / D_b$

14. Lorsque le signal est soumis à des évanouissements du canal, les c_k deviennent très petits et les erreurs se produisent par paquet. On veut évaluer cet inconvénient.
Quelle est la valeur moyenne du gain instantané $\rho_k = |c_k|$ du canal ?

$\rho_k = |c_k|$ suit une loi de Rayleigh $p_{\rho_k}(x) = \frac{x}{\sigma^2} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ de moyenne $\rho_m = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$

15. Quelle est la probabilité pour que le module du gain du canal soit inférieur à 10% de sa valeur moyenne ?

$$\Pr\{\rho_k < \rho_m/10\} = \int_0^{\rho_m/10} \frac{x}{\sigma^2} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\, dx = \left[-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right]_0^{\frac{\rho_m}{10}} = 1 - e^{-\frac{\pi}{400}} = 0,0078$$

16. Pour remédier à ce phénomène on fait de la diversité. Comment faire ici de la diversité d'ordre N dans le temps ?

Dupliquer N fois chaque bit, ce qui réduit d'autant le débit, et les transmettre les N bits à des intervalles de temps supérieurs au temps de cohérence T_c du canal, ce qui se fait à l'aide d'un entrelaceur.
