**CORRIGE du Contrôle2 CN21 2004/2005**

## A) MODULATION BOC$(f_s, f_c)$.

La modulation BOC$(f_s, f_c)$ ‘ Binary Offset Carrier’, utilisée dans les systèmes de radionavigation, consiste à décaler de $f_s$ le spectre des codes (de débit $f_c$) afin de mieux séparer la réception des systèmes GPS et GALLILEO qui utilisent la même bande de fréquences.

Deux codes binaires indépendants $c_1$ et $c_1'$ au même débit $f_c = 2$Mbit/s sont transmis, sur la même fréquence porteuse, chacun par une modulation à deux états d’amplitude NRZ $\{\pm 1\}$, l’un sur la voie en phase l’autre sur la voie en quadrature.

Ceci donne le signal modulé : $x_1(t) = c_1(t)\sqrt{2}\cos(\omega_0 t) - c_1'(t)\sqrt{2}\sin(\omega_0 t)$.

1. Quelle est l’expression analytique d’un code binaire NRZ $\{\pm 1\}$.

$$s(t) = \sum_k d_k \cdot g(t - kT) \;;\; d_k \in \{-1, +1\} \;;\; g(t) = A \cdot \Pi_T(t).$$

2. Quelle est l’expression de sa DSP si la suite est i.i.d. équiprobable.

D’après la formule de Bennett : $S_s(f) = \dfrac{|G(f)|^2}{T_s}$

3. Quelle est l’expression de l’équivalent en bande de base $s_1(t)$ du signal $x_1(t)$.

$$s_1(t) = c_1(t) + j \cdot c_1'(t)$$

4. Quelle est l’expression de la DSP de ce signal $s_1(t)$.

Les codes sont indépendants : $S_{s_1}(f) = \dfrac{|G(f)|^2}{T_s} + \dfrac{|G(f)|^2}{T_s}$

On transmet sur la même fréquence $f_0 = 1575$MHz que le GPS, pour faciliter la séparation lors de la réception on décale le spectre à l’aide d’une fonction horloge élémentaire $hs(t)$, alternance de $\pm 1$, à la cadence $f_s = 14$MHz : $hs(t) = \text{signe}\left(\sin(2\pi f_s t)\right)$.

Ceci donne le signal $s_{\text{BOC}}(t) = s_1(t) \cdot \text{signe}\left(\sin(2\pi f_s t)\right)$.

5. Ecrire $hs(t)$ à l’aide de la fonction porte $\Pi_{\frac{T_s}{2}}(t)$ et d’un peigne de diracs $\text{Ш}_{T_s}(t)$.

$$hs(t) = \Pi_{\frac{T_s}{2}}(t) * \left(\delta\left(t - \tfrac{T_s}{4}\right) - \delta\left(t + \tfrac{T_s}{4}\right)\right) * \text{Ш}_{T_s}(t)$$

6. Calculer sa transformée de fourier $hs(f)$. Et la représenter graphiquement.

$$hs(f) = \tfrac{T_s}{2}\text{sinc}\left(\pi f \tfrac{T_s}{2}\right) \cdot \left(e^{-j2\pi f \frac{T_s}{4}} - e^{+j2\pi f \frac{T_s}{4}}\right) \cdot \tfrac{1}{T_s}\text{Ш}_{\frac{1}{T_s}}(t)$$

$$hs(f) = -j \cdot \text{sinc}\left(\pi f \tfrac{T_s}{2}\right) \cdot \sin\left(\pi f \tfrac{T_s}{2}\right) \cdot \text{Ш}_{\frac{1}{T_s}}(t) \;.$$

$$|hs(f)| = \sin^2\left(\pi f \tfrac{T_s}{2}\right) \cdot \frac{2}{\pi f T_s} \cdot \text{Ш}_{\frac{1}{T_s}}(t)$$

Le sinus s’annule tous les $f = k\frac{2}{T_s}$, seules les raies impaires persistent.

7. On supposera que la DSP de $hs(f)$ est $|hs(f)|^2$. Déterminez le spectre du signal $s_{\text{BOC}}(t)$.

$|hs(f)|^2 = \sum_{k \text{ impair}} \cdot \frac{4}{(k\pi)^2} \delta\left(f - \frac{k}{T_s}\right)$ seules les raies impaires persistent.

$S_{\text{BOC}}(f) = \sum_{k \text{ impair}} \frac{4}{(k\pi)^2} \frac{\left|G\left(f - \frac{k}{T_s}\right)\right|^2}{T_s}$ Les termes centrés sur $f = \pm\frac{1}{T_s}$ sont prédominants.

On considère maintenant une deuxième fonction horloge $hc(t) = \text{signe}\left(\cos\left(2\pi f_s t\right)\right)$.

8. Donner l'expression analytique de $hc(t)$ semblable à celle de $hs(t)$.

$$hc(t) = hs(t) * \delta\left(t + \frac{T_s}{4}\right)$$

9. En déduire l'expression de $h(t) = hc(t) + j \cdot hs(t)$ puis du spectre $|h(f)|^2$.

$$h(t) = hs(t) * \left(\delta\left(t + \frac{T_s}{4}\right) + j \cdot \delta(t)\right)$$

$$|h(f)|^2 = |hs(f)|^2 \cdot \left|e^{+j2\pi f \frac{T_s}{4}} + j\right|^2 = |hs(f)|^2 \cdot \left(2 + 2\sin\left(2\pi f \frac{T_s}{4}\right)\right)$$

Le deuxième terme s'annule pour $f = -\frac{1}{T_s} + k\frac{4}{T_s}$ ce qui supprime en particulier le spectre centré sur $f = -\frac{1}{T_s}$.

10. Représenter la constellation de $h(t)$.

TSVP ►

## B) CANAL DE RAYLEIGH.

On transmet un signal binaire, au débit $D_b = 10\text{Mbit/s}$, à l'aide d'une modulation MAQ-16 filtrée en cosinus surélevé de facteur de roll-off $\alpha = 0.4$. La porteuse est à $f_0 = 1\text{GHz}$. La transmission se fait sur un canal mobile dispersif. Le mobile peut atteindre une vitesse maximum de 120km/h.

1. Quel est l'étalement doppler maximum ? $f_d = f_0 \cdot \frac{v}{c} = 1 \cdot 10^9 \frac{100/3}{3 \cdot 10^8} \simeq 111\text{Hz}$

2. Quelles sont les conditions pour considérer que la transmission suit un modèle de Rayleigh ?
   Pas de trajet direct, répartition uniforme des trajets, gains gaussiens complexes, bande de cohérence supérieure à la bande du signal, variations lentes.
   Ici le temps de cohérence du canal est de l'ordre de la dizaine de millisecondes, ce qui est bien supérieur à la durée d'un symbole qui est de 400ns.

3. On considère le canal ci-dessus comme un canal de Rayleigh, quels sont alors sa bande de cohérence et son temps de cohérence ?

$B_c \gg B = R \cdot (1+\alpha) = 1,4 \cdot R = 1,4 \cdot \frac{10}{4} \cdot 10^6 = 3.5\text{MHz}$ ; $T_c \approx \frac{1}{B_{dop}} = \frac{1}{222} = 4.5\text{ms} \gg T_s = 400\text{ns}$

4. Le canal est-il à variations lentes ? Est-il dispersif ?

A variations lentes par rapport au temps symbole et Non dispersif.

5. Schématiser le récepteur optimal BABG de la modulation MAQ-16 (en équivalent BdB).

6. Exprimer la probabilité d'erreur instantanée de la modulation MAQ-16 , en fonction de $c_k, N_0, P_e, D_b$ ? ( $P_e$ puissance émise). (Coefficients complexes $c_k$ , du canal discret, de loi gaussienne centré de variance $\sigma^2$ ). ( $N_0/2$ DSP bilatérale du BABG réel).

La probabilité d'erreur instantanée est celle d'une MAQ-16 affectée d'un gain $c_k$ .

$$\underset{\text{M-QAM}}{\Pr\{Ers\}} = 1 - \underset{\text{M-QAM}}{\Pr\{Dc\}} = 1 - \left( \underset{\sqrt{M}\text{-PAM}}{\Pr\{Dc\}} \right)^2 = 1 - \left( 1 - \underset{\sqrt{M}\text{-PAM}}{\Pr\{Ers\}} \right)^2 \approx 2 \cdot \underset{\sqrt{M}\text{-PAM}}{\Pr\{Ers\}}$$

$$\underset{M\text{-PAM}}{\Pr\{Ers\}} = 2 \cdot \frac{M-1}{M} \cdot Q\left( \sqrt{\frac{E_{br}}{N_0} \cdot \frac{6\log_2 M}{M^2 - 1}} \right)$$

$$\underset{\text{16-QAM}}{\Pr\{Ers\}} \approx 4 \cdot \frac{\sqrt{16}-1}{\sqrt{16}} \cdot Q\left( \sqrt{\frac{E_{br}}{N_0} \cdot \frac{6\log_2 \sqrt{16}}{16-1}} \right) = 3 \cdot Q\left( \sqrt{\frac{E_{br}}{N_0} \cdot \frac{12}{15}} \right)$$

avec $E_{br} = E_{b\text{reçue}} = P_e \cdot |c_k|^2 / D_b = E_{b\text{émise}} \cdot |c_k|^2$

7. On fait une diversité de réception d'ordre deux à l'aide de deux antennes suffisamment espacées et de la combinaison des deux signaux avant démodulation MAQ-16.

Exprimer la valeur moyenne $\gamma$ du rapport signal à bruit instantané : $\gamma_n = \sum_{l=1}^{2} |c_{n,l}|^2 \frac{E_{be}}{N_0} = \sum_{l=1}^{2} \gamma_{n,l}$

$$E\{\gamma_{n,l}\} = 2\sigma^2 \cdot \frac{E_{be}}{N_0} \triangleq \gamma \quad \text{et pour la somme des deux canaux indépendants} \quad E\{\gamma_n\} = 2\gamma$$

8. Determinez la loi de probabilité de $\gamma_n$ .

Produit de convolution des deux lois exponentielles :

$$p_{\gamma_n}(x) = p_{\gamma_{n,1}} * p_{\gamma_{n,2}} = \frac{x}{\gamma^2} \cdot \exp\left( -\frac{x}{\gamma} \right) \cdot \mathrm{u}(x)$$

9. Calculer la probabilité d'erreur moyenne de cette diversité en MAQ-16.

$$\underset{\text{16-QAM}}{\Pr\{Ers / \gamma_n\}} \approx 3 \cdot Q\left( \sqrt{\gamma_n \cdot \frac{12}{15}} \right) \quad \text{en moyenne} \quad \Pr\{Ers\} \simeq 3 \int_0^{+\infty} Q\left( \sqrt{\tfrac{12}{15} x} \right) \frac{x}{\gamma^2} \cdot \exp\left( -\frac{x}{\gamma} \right) dx$$

par parties

---

Article GNSS2003Graz "New Investigations On Wide Band Gnss2 Signals" L.Riess.