CORRIGE du Contrôle1 CN21 2005/2006

MAQ-8 Rectangulaire.

On considère une source binaire, au débit D_b de 120 Mbit/s. Les données binaires $\{b_k\}$ sont i.i.d à valeurs $b_n \in \{\pm 1\}$ de probabilité $\Pr\{b_n = +1\} = 1/2$.

On code cette source pour obtenir la suite $\{d_k\}$,

la règle de codage est : $d_k = b_{3k} + 2 \cdot b_{3k+1} + j \cdot b_{3k+2}$.

On transmet ces données par une modulation d'enveloppe complexe $\alpha_x(t)$ par rapport à la fréquence $f_0 = 1\text{GHz}$: $\alpha_x(t) = \sum_k d_k \cdot g(t - kT_s)$, avec $g(t) = A \cdot \Pi_{T_s}(t)$

1. Donner l'expression analytique du signal MAQ-8 réel : $x(t) = \text{Re}\left\{\alpha_x(t) \cdot \sqrt{2} \cdot e^{j2\pi f_0 t}\right\}$.

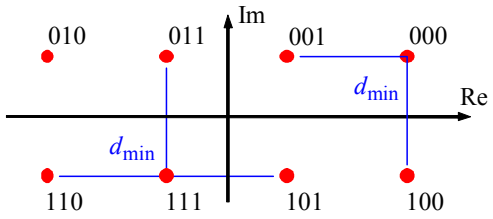
$$x(t) = \sum_k \left(d_{pk} \cdot \sqrt{2}\cos(2\pi f_0 t) - d_{qk}\sqrt{2}\sin(2\pi f_0 t)\right) \cdot g(t - kT_s)$$

2. Quelles sont les valeurs que peut prendre un symbole?

Un symbole est, en enveloppe complexe, de la forme $g_k(t) = d_k \cdot g(t)$ avec 8 possibilités qui forment un sous espace de dim=2 : $d_{pk} = \text{Re}(d_k) \in \{+3, +1, -1, -3\}$ et $d_{qk} = \text{Im}(d_k) \in \{+1, -1\}$.

Soit $s_i(t) \in \left\{\left(\{\pm 1, \pm 3\}\sqrt{2}\cos(\omega_0 t) \mp \sqrt{2}\sin(\omega_0 t)\right) \cdot g(t)\right\}$ ou $\alpha_{s_i}(t) \in \left\{\left(\{\pm 1, \pm 3\} \pm j\right) \cdot g(t)\right\}$

3. Représenter la constellation de cette modulation.



(Rectangle)

4. Déterminer l'énergie moyenne émise par symbole E_s et par bit E_b.

$E_s = \text{E}\{E_i\}$; $E_i = \int |d_k|^2 g^2(t) \cdot dt = |d_k|^2 A^2 T_s$

$$E_s = \frac{1}{8} \cdot A^2 T_s \left(4 \cdot \left(1^2 + 1^2\right) + 4 \cdot \left(3^2 + 1^2\right)\right) = 6 \cdot A^2 T_s \quad \text{et} \quad E_b = E_s \frac{D_s}{D_b} = \frac{E_s}{\log_2 8} = 2 \cdot A^2 T_s$$

5. Quelle est la distance minimale $d_{\min}$ entre deux formes, l'exprimer en fonction de E_b.

$d_{\min}^2 = |1 + j - (1 - j)|^2 A^2 T_s = 4 \cdot A^2 T_s$ soit $d_{\min} = \sqrt{2 \cdot E_b}$

6. Calculer l'expression analytique de la DSP de cette modulation et la représenter sur un dessin. Quelle est la largeur de bande du lobe principal ?

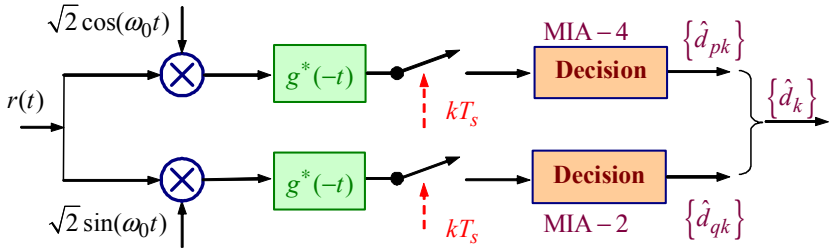
Formule de Bennett, états indépendants d'après le codage. Moyenne m_d nulle, $E\left\{d_k^2\right\} = 6$.

$$S_{\alpha_x}(f)=\frac{|G(f)|^2}{T_s}\cdot(6)=6\cdot A^2T_s\cdot\mathrm{sinc}^2(\pi f T_s)$$ **(NB : Une DSP est toujours ≥ 0)**

La DSP du signal réel passe bande est donnée par : $S_x(f)=\frac{1}{2}\cdot\left\{S_{\alpha_x}(f-f_0)+S_{\alpha_x}(-f-f_0)\right\}$.

Le lobe principal à une largeur totale de $2D_s=2\cdot120/3=80\text{MHz}$.

7. La transmission se fait sur un canal à bruit additif blanc de DSP $S_b(f)=N_0/2$, et gaussien de loi $\mathcal{N}(0,N_0/2)$. Faire un schéma du récepteur optimal avec une décision séparée sur chaque voie.



8. Les voies en phase et quadrature sont indépendantes. Quelle est la probabilité d'erreur sur les bits de la voie en quadrature ?

MIA-2 la distance entre les deux formes est $d_{\min}=\sqrt{2\cdot E_b}$,

la probabilité d'erreur est $\Pr_{\text{2-PAM}}\{Erb\}=Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right)=Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$

9. Quelle est la probabilité d'erreur sur les bits de la voie en phase ? (utiliser la borne de l'union).

MIA-4 les 4 points de la constellation se trouvent à $(+3,+1,-1,-3)A\sqrt{T_s}$, les extérieurs ont un seul voisin à $d_{\min}=2\cdot A\sqrt{T_s}=\sqrt{2\cdot E_b}$, les points intérieurs ont deux voisins à $d_{\min}$ la probabilité d'erreur est majorée par : $\Pr_{\text{4-PAM}}\{Ers\}\le\frac{1}{4}(2\cdot1+2\cdot2)Q\left(\sqrt{\frac{d_{\min}^2}{2N_0}}\right)=\frac{3}{2}Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$

Avec un codage de Gray, $\Pr_{\text{4-PAM}}\{Erb\}\approx\frac{1}{2}\Pr_{\text{4-PAM}}\{Ers\}\le\frac{3}{4}Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$

10. Quelle est la probabilité d'erreur globale sur les bits restitués ?

$$\Pr_{\text{MAQ-8}}\{Ers\}=1-\Pr_{\text{MAQ-8}}\{Dc\}=1-\left(\Pr_{\text{MIA-4}}\{Dc\}\cdot\Pr_{\text{MIA-2}}\{Dc\}\right)=1-\left(1-\Pr_{\text{MIA-4}}\{Ers\}\right)\left(1-\Pr_{\text{MIA-2}}\{Ers\}\right)\approx\Pr_{\text{MIA-4}}\{Ers\}+\Pr_{\text{MIA-2}}\{Ers\}$$

Puisque les voies sont indépendantes et $\Pr_{\text{MAQ-8}}\{Erb\}\le\frac{7}{4}Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$