CORRIGE du Contrôle2 de CN21 2005/2006

MDP-8. On considère une source binaire, au débit D_b. Les données binaires $\{b_k\}$ sont i.i.d à valeurs $b_k \in \{\pm 1\}$ de probabilité $\Pr\{b_k = +1\} = p$.

On transmet ces données par une modulation à 8 états de phase, le signal émis s'écrit :

$$x(t) = \sum_k \sqrt{2}\cos\left(2\pi f_0 t + \phi_k\right)\cdot g(t - kT_s), \qquad \text{avec } g(t) = A\cdot \Pi_{T_s}(t) \text{ et } \phi_k \in \left\{i\frac{\pi}{4}\right\}, i = 1,2,\ldots,8.$$

1. Donner l'équivalent BdB de cette modulation. Quelles sont les formes d'un symbole ?

Enveloppe complexe par rapport à f_0 : $\alpha_x(t) = \sum_k \left(\cos(\phi_k) + j\sin(\phi_k)\right)\cdot g(t - kT_s)$.

Huit formes possibles : $s_i(t) = \mathrm{e}^{j\varphi_i}\, g(t)$, $\varphi_i = i\frac{\pi}{4}$, $i = 1,2,\ldots,8$.

2. Calculer les énergies moyennes par symbole E_s et par bit E_b en fonction de A, p et de T_s.

Même énergie pour chaque forme donc :

$$E_s = E_i \sum_{i=1}^{8} p_i = E_i = \int \left|\mathrm{e}^{j\varphi_i}\, g(t)\right|^2 dt = \int_{-T_s/2}^{+T_s/2} |A|^2\, dt = A^2 T_s, \quad E_b = E_s \cdot \frac{D_s}{D_b} = \frac{E_s}{\log_2 8} = E_s/3.$$

Puisque $\displaystyle\sum_{i=1}^{8} p_i = \sum_{n=0}^{3} \binom{3}{n} \cdot p^n (1-p)^{3-n} = 1$

3. Dessiner la constellation de cette modulation. Préciser les axes et les amplitudes. Donner un codage de Gray des points.

8 points sur le cercle de rayon $A\sqrt{T_s}$.

4. Exprimer la distance minimale entre les points en fonction de l'énergie moyenne par bit.

Triangle isocèle d'angle au sommet $\pi/4$, $d_{\min} = 2A\sqrt{T_s}\sin(\pi/8) = 2\sqrt{3E_b}\sin(\pi/8)$.

Ou $d_{\min} = A\sqrt{T_s}\sqrt{2 - 2\cos(\pi/4)} = \sqrt{3E_b}\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

5. La transmission est en canal BABG de DSP $N_0/2$, le récepteur est optimal. Appliquer la formule de la borne de l'union pour calculer la probabilité d'erreur par bit (avec $p = \frac{1}{2}$).

$$\Pr\{Ers\} \le \sum_{i=1}^{M}\left(\sum_{j\neq i} \mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{d_{ij}^2}{2N_0}}\right)\right)\cdot \Pr\{H_i\}. \qquad \Pr\{Erb\} \le \sum_{i=1}^{M}\left(\sum_{j\neq i} \frac{m}{M}\cdot \mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{d_{ij}^2}{2N_0}}\right)\right)\cdot \Pr\{H_i\}$$

avec m le nombre des bits qui changent entre les deux points

ici chaque point à deux voisins à $d_{\min}$ et un seul bit qui change par codage de Gray.

$$\Pr\{Erb\} \le \sum_{i=1}^{M}\left(\sum_{j=\text{voisins}} \frac{1}{3}\cdot \mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{d_{\min}^2}{2N_0}}\right)\right)\cdot p_i = \sum_{i=1}^{8}\left(\sum_{2\,\text{voisins}} \frac{1}{3}\cdot \mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{6E_b\sin^2(\pi/8)}{N_0}}\right)\right)\cdot p_i$$

$$\Pr\{Erb\} \le \frac{2}{3}\cdot \mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{6E_b \sin^2(\pi/8)}{N_0}}\right) \qquad \text{puisque} \qquad \sum_{i=1}^{8} p_i = 1.$$

DSP. On considère une source binaire, au débit D_b. Les données binaires $\{b_k\}$ sont i.i.d à valeurs $b_k \in \{\pm 1\}$ de probabilité $\Pr\{b_k = +1\} = p$.

Le signal binaire s'écrit : $x(t) = \sum_k d_k \cdot g(t - kT_b)$, avec $g(t) = A \cdot \Pi_{T_b}(t)$.

On transmet ces données par une modulation BOC(2,1), on multiplie le signal binaire par un signal d'horloge d'amplitude $\pm V$ et de fréquence $f_H = 2D_b$.

Horloge : $h(t) = \sum_l m(t - lT_H)$, avec le motif : $m(t) = +V \cdot \Pi_{T_H/2}(t - \frac{T_H}{4}) - V \cdot \Pi_{T_H/2}(t - \frac{3T_H}{4})$.

1. Calculer l'énergie moyenne par symbole du signal binaire $x(t)$.

$$E_s = E_i \sum_{i=1}^{2} p_i = E_i = \int |g(t)|^2 \, dt = \int_{-T_s/2}^{+T_s/2} |A|^2 \, dt = A^2 T_b.$$

2. Calculer la DSP $S_x(f)$ de $x(t)$ en fonction de A, p et de T_b. $\quad G(f) = AT_b \mathrm{sinc}(\pi f T_b)$

Formule de Bennett i.i.d, $m_b = p$, $R_b(n) = m_b^2$, $R_b(0) = p + (1-p) = 1$.

$$S_x(f) = A^2 T_b \mathrm{sinc}^2(\pi f T_b)\left\{1 - p^2 + \frac{p^2}{T_b}\cdot \text{Ш}_{\frac{1}{T_s}}(f)\right\}$$

3. Quelles sont les formes possibles d'un symbole du signal modulé $s(t) = x(t) \cdot h(t)$.

Deux formes inversées constituées chacune de deux motifs d'horloge :

$$s_1(t) = -s_2(t) = A \cdot \big(m(t + T_H) + m(t)\big)$$

4. Calculer l'énergie moyenne par symbole du signal modulé $s(t)$.

$$E_s = E_1 = E_2 = A^2 V^2 T_b$$

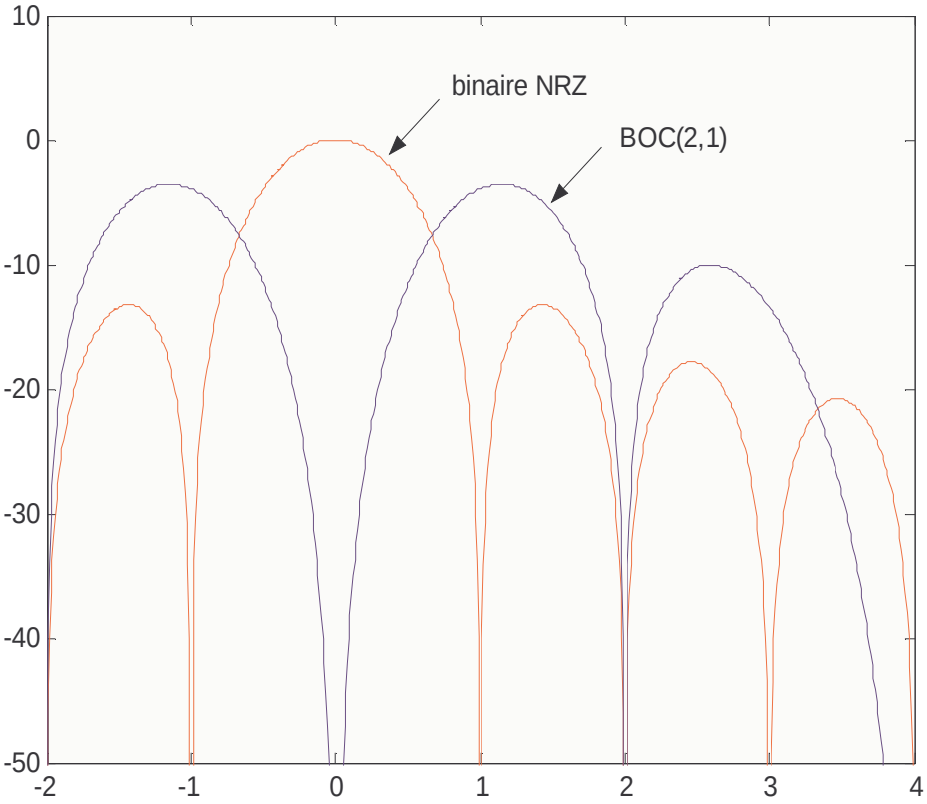
5. Calculer la DSP $S_s(f)$ de $s(t)$ en fonction de A, V, p et de T_b.

Formule de Bennett i.i.d, $m_b = p$, $R_b(n) = m_b^2$, $R_b(0) = p + (1-p) = 1$.

$$M(f) = V \cdot \frac{T_b}{4}\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi f T_b}{4}\right)\cdot\left(\mathrm{e}^{-j2\pi f \frac{T_b}{8}} - \mathrm{e}^{-j2\pi f \frac{3T_b}{8}}\right) = V \cdot \frac{T_b}{4}\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi f T_b}{4}\right)\cdot \sin\left(2\pi f \frac{T_b}{8}\right)\cdot 2j\mathrm{e}^{-j2\pi f \frac{T_b}{4}}$$

$$S_1(f) = A \cdot M(f)\cdot\left(\mathrm{e}^{+j2\pi f \frac{T_b}{2}} - 1\right) = A \cdot M(f)\cdot \sin\left(2\pi f \frac{T_b}{4}\right)\cdot 2j\mathrm{e}^{+j2\pi f \frac{T_b}{4}}$$

d'où : $\quad S_s(f) = A^2 V^2 T_b \cdot \mathrm{sinc}^2\left(\pi f \frac{T_b}{4}\right)\cdot \sin^2\left(\pi f \frac{T_b}{4}\right)\cdot \sin^2\left(\pi f \frac{T_b}{2}\right)\cdot\left\{1 - p^2 + \frac{p^2}{T_b}\cdot \text{Ш}_{\frac{1}{T_s}}(f)\right\}$


10
0
-10
-20
-30
-40
-50
-2
-1
0
1
2
3
4
binaire NRZ
BOC(2,1)