CORRIGE du Contrôle 1 CN21 2007/2008

Exercices :

On désire transmettre des données binaires iid équiprobables avec une MAQ-6 :

$$x(t)=\sum_k d_{pk}g(t-kT_s)\sqrt{2}\cos(2\pi f_0 t+\phi)-\sum_k d_{qk}g(t-kT_s)\sqrt{2}\sin(2\pi f_0 t+\phi)$$

Avec : $g(t)=\Pi_{T_s}(t)/\sqrt{T_s}$, ϕ aléatoire uniforme $[0,2\pi]$, $T_s=N/f_0$ et N entier.

11. Quel l'équivalent en bande de base $\alpha_x(t)$ de $x(t)$?

$$\alpha_x(t)=\sum_k\left(d_{pk}+jd_{qk}\right)g(t-kT_s)e^{j\phi}$$

12. Proposer un codage pour les d_{pk} et d_{qk}.

Rectangle : $d_{pk}=b_{3k}+2b_{3k+1}$ ou mieux codage de Gray et $d_{qk}=b_{3k+2}$; avec $b_n\in\{\pm 1\}$.

Circulaire : $\left(d_{pk}+jd_{qk}\right)\in\{e^{j\frac{m\pi}{4}},m=1,...,8\}$ avec codage de Gray

Ou autre en précisant l'attribution des trois bits aux points de constellation.

13. déterminez la constellation de la MAQ-6 en utilisant le 12) et en projetant sur la base :

$\varphi_1=g(t)\sqrt{2}\cos(2\pi f_0 t)$ et $\varphi_2(t)=g(t)\sqrt{2}\sin(2\pi f_0 t)$.

Constellation rectangulaire ou circulaire ou autre, le calcul des projections donne :

$$\int s_i(t)\varphi_1^*(t)dt=d_{pk}\cos\phi-d_{qk}\sin\phi \quad \text{et} \quad \int s_i(t)\varphi_2^*(t)dt=d_{pk}\sin\phi+d_{qk}\cos\phi$$

Il s'agit d'une rotation de ϕ de la constellation des d_{pk},d_{qk}.

$$E_s=\frac{1}{8}\sum_{m=1}^{8}\left(d_{pk}(m)+jd_{qk}(m)\right)^2$$

14. Utiliser la borne de l'union pour majorer la probabilité d'erreur en réception optimale de cette modulation si le canal est idéal à BABG de DSP $S_n(f)=N_0/2$.

$$\Pr\{Ers\}\le\sum_{i=1}^{M}\left(\sum_{j\neq i}\mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{d_{ij}^2}{2N_0}}\right)\right)\cdot\Pr\{H_i\}=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{M}\left(\sum_{j\neq i}\left(\begin{array}{c}\text{nombre}\\ \text{de points}\\ \text{à } d_{\min}\end{array}\right)\mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{d_{\min}^2}{2N_0}}\right)\right)$$

15. Sachant que $\{d_k\}$ est une suite i.i.d. et que $g(t) = \cos(\pi t / T_s) \cdot \Pi_{T_s}(t)$, montrer que le signal numérique $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k g(t - kT_s)$ vérifie le critère de Nyquist.

$$R_g(\tau) = g(t) * g^*(-t) = \int \cos(\pi t / T_s) \cdot \Pi_{T_s}(t) \cos(\pi(\tau - t) / T_s) \cdot \Pi_{T_s}(\tau - t) dt$$

Si $\tau > 0$: $R_g(\tau) = \int_{\tau - T_s/2}^{T_s/2} \cos(\pi t / T_s) \cos(\pi(\tau - t) / T_s)\, dt$

Si $\tau < 0$: $R_g(\tau) = \int_{-T_s/2}^{\tau + T_s/2} \cos(\pi t / T_s) \cos(\pi(\tau - t) / T_s)\, dt$

Soit : $R_g(\tau) = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi\tau}{T_s}\right) \cdot \Lambda_{2T_s}(\tau)$

Donc $R_g(kT_s) = 0, \quad \forall k \neq 0$ vérifie Nyquist.