CORRIGE du Contrôle 2 CN21 2007/2008

Exercice1 : On une suite i.i.d $\{d_k\}$ ($d_k \in \{\pm 1\}$ avec $\Pr\{d_k = 1\} = p$) et le codage $b_k = b_{k-1} d_k$ qui donne la suite stationnaire $\{b_k\}$.

1. Déterminez l'espérance mathématique $\mathrm{E}\{b_k b_{k-n}\}$ pour toutes les valeurs de *n*.

$m_d = \mathrm{E}\{d_k\} = 1 \cdot p + (-1)(1-p) = 2p - 1$

La moyenne $m_b = \mathrm{E}\{b_k\} = \mathrm{E}\{b_{k-1} d_k\} = \mathrm{E}\{d_k\}\mathrm{E}\{b_{k-1}\} = \mathrm{E}\{d_k\} m_b$ puisque les variables sont indépendantes, et comme $\mathrm{E}\{d_k\}$ n'est pas nul $m_b = 0$.

On en déduit que les b_k sont équi-répartis $\Pr\{b_k = 1\} = \frac{1}{2}$.

$R_b(0) = \mathrm{E}\{b_k^2\} = 1^2 \cdot \frac{1}{2} + (-1)^2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

$R_b(1) = \mathrm{E}\{b_k b_{k-1}\} = \mathrm{E}\{b_{k-1} d_k b_{k-1}\} = \mathrm{E}\{d_k\}\mathrm{E}\{b_{k-1} b_{k-1}\} = \mathrm{E}\{d_k\} R_b(0)$

$R_b(n) = \mathrm{E}\{b_k b_{k-n}\} = \mathrm{E}\{b_{k-1} d_k b_{k-n}\} = \mathrm{E}\{d_k\}\mathrm{E}\{b_{k-1} b_{k-n}\} = \mathrm{E}\{d_k\} R_b(n-1)$

De plus $R_b(n) = R_b^*(-n)$ propriété de la FAC.

Donc $R_b(n) = (2p-1)^{|n|}$, $\quad \forall n \in$

Exercice2 : On considère un bruit blanc gaussien centré $b(t)$ de densité spectrale de puissance (DSP) $S_b(f) = N_0/2$. On obtient deux bruits $n_1(t)$ et $n_2(t)$ en filtrant ce bruit par deux filtres $h_1(t) = \cos(20\pi t/T) \cdot \Pi_T(t)$ et $h_2(t) = \sin(20\pi t/T) \cdot \Pi_T(t)$.

2. Montrer que $h_1(t)$ et $h_2(t)$ sont orthogonaux ?

$$\langle h_1(t), h_2(t) \rangle = \int \cos(20\pi t/T) \cdot \sin(20\pi t/T) \cdot \Pi_T(t) dt = \int_{-T/2}^{+T/2} \frac{1}{2} \cdot \sin(40\pi t/T)\, dt = 0$$

La fonction sinus étant impaire.

3. Calculer les fonctions de transfert des filtres $h_1(t)$ et $h_2(t)$.

$$H_1(f) = \mathrm{TF}\{h_1(t)\} = \frac{1}{2} \cdot \left(\delta\left(f - \frac{10}{T}\right) + \delta\left(f + \frac{10}{T}\right) \right) * T \cdot \mathrm{sinc}(\pi f T)$$

$$H_2(f) = \mathrm{TF}\{h_2(t)\} = \frac{1}{2i} \cdot \left(\delta\left(f - \frac{10}{T}\right) - \delta\left(f + \frac{10}{T}\right) \right) * T \cdot \mathrm{sinc}(\pi f T)$$

4. Calculer la DSP $S_{n_1}(f)$ du processus aléatoire stationnaire $n_1(t)$ (on négligera les doubles produits), en déduire celle de $n_2(t)$ et calculer l'inter-spectre $S_{n_1n_2}(f)$.

$$S_{n_1}(f) = S_b(f) \cdot |H_1(f)|^2 = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{T^2}{4} \cdot \left| \sin c\left(f - \frac{10}{T}\right) + \sin c\left(f + \frac{10}{T}\right) \right|^2$$

$$S_{n_1}(f) = \frac{N_0 T^2}{8} \cdot \left(\text{sinc}^2\left(f - \frac{10}{T}\right) + \text{sinc}^2\left(f + \frac{10}{T}\right) \right)$$

$$S_{n_1n_2}(f) = S_b(f) \cdot H_1(f) \cdot H_2^*(f) = -\frac{i \cdot N_0 T^2}{8} \cdot \left(\text{sinc}^2\left(f - \frac{10}{T}\right) - \text{sinc}^2\left(f + \frac{10}{T}\right) \right)$$

5. Déduire du spectre la fonction d'autocorrélation en zéro $R_{n_1}(0)$. (on a $\int \text{si nc}^2(x)dx = \pi$).

$$R_{n_1}(\tau) = TF^{-1}\left\{S_{n_1}(f)\right\} = \int S_{n_1}(f) e^{i2\pi ft} df$$

$$R_{n_1}(0) = \int S_{n_1}(f) df = \int \frac{N_0 T^2}{8} \cdot \left(\text{sinc}^2\left(f - \frac{10}{T}\right) + \text{sinc}^2\left(f + \frac{10}{T}\right) \right) df = 2\pi \cdot \frac{N_0 T^2}{8}$$

6. On prélève un échantillon de chacun des deux bruits, quelle est la loi de probabilité de ces échantillons ? Montrer qu'ils sont indépendants.

Les bruits colorés sont aussi gaussiens centrés. Les échantillons, à l'instant *t*, sont gaussiens centrés de variance : $\sigma_{n_2}^2 = \sigma_{n_1}^2 = \text{E}\left\{n_1(t) \cdot n_1^*(t)\right\} = R_{n_1}(0) = \pi \cdot \frac{N_0 T^2}{4}$

Les variables étant gaussiennes, l'indépendance est vérifiée si $\text{E}\left\{n_1(t) \cdot n_2^*(t)\right\} = 0$.

Espérance qui est en relation avec la FIC et la DSI par :

$$\text{E}\left\{n_1(t) \cdot n_2^*(t)\right\} = R_{n_1n_2}(0) = \int S_{n_1n_2}(f) df = \int \frac{-iN_0 T^2}{8} \cdot \left(\text{sinc}^2\left(f - \frac{10}{T}\right) - \text{sinc}^2\left(f + \frac{10}{T}\right) \right) df = 0$$
