TELECOM SUD PARIS — CONTROLE DE CONNAISSANCES CF2

MODULE : COMMUNICATIONS NUMERIQUES — CODE : SIC 4001

DUREE : 1 H 30 SANS DOCUMENTS — DATE : 27 / 02 / 2008

Questions de cours : (Réponses brèves entre une et cinq lignes)

1. Ecrire le rapport de vraisemblance à postériori entre les deux hypothèses H_1 et H_2.
2. Quelle sont les probabilités d'erreur (en BABG) des MIA-2, MDP2, MAQ-4 ?
3. $\cos(2\pi f_0 t)$ et $\sin(2\pi f_0 t)$ sont-il orthogonaux, si oui à quelle condition ?
4. Quel est le filtre adapté à un signal en racine de cosinus surélevé ?
5. $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Sinc}^2(\pi f_0 t)\,dt =$: $1/f_0$, f_0, π/f_0, πf_0 ou π ?
6. Comparer la rapidité de modulation d'un signal ternaire RZ et d'un signal ternaire NRZ ?
7. Quel est l'intérêt du filtre en cosinus surélevé ?
8. Exprimer la probabilité d'erreur $\Pr\{\mathcal{E}\}$ en fonction de trois Hypothèses incompatibles.
9. L'efficacité spectrale s'exprime en : bit/Hz, Baud/Hz, Bit/s/Hz, Baud/s/Hz ou Symbole/Hz ?
10. Comparer $Q(x)$ avec $Q(2x)$.

Exercice1 : On a une suite i.i.d $\{d_k\}$ ($d_k \in \{\pm 1\}$ avec $\Pr\{d_k = 1\} = p$), soit le codage $b_k = b_{k-1} d_k$ qui donne la suite stationnaire $\{b_k\}$.

11. Déterminez l'espérance mathématique $\mathrm{E}\{b_k b_{k-n}\}$ pour toutes les valeurs de *n*.

Exercice2 : On considère un bruit blanc gaussien centré $b(t)$ de densité spectrale de puissance (DSP) $S_b(f) = N_0/2$. On obtient deux bruits $n_1(t)$ et $n_2(t)$ en filtrant ce bruit $b(t)$ par deux filtres $h_1(t) = \cos(20\pi t/T)\cdot\Pi_T(t)$ et $h_2(t) = \sin(20\pi t/T)\cdot\Pi_T(t)$.

12. Montrer que $h_1(t)$ et $h_2(t)$ sont orthogonaux ?

13. Calculer les fonctions de transfert des filtres $h_1(t)$ et $h_2(t)$.

14. Calculer la DSP $S_{n_1}(f)$ du processus aléatoire stationnaire $n_1(t)$ (on négligera les doubles produits), en déduire celle de $n_2(t)$ et calculer l'inter-spectre $S_{n_1 n_2}(f)$.

    (Rappel formule des interférences : $S_{y_1 y_2}(f) = S_{x_1 x_2}(f)\cdot H_1(f)\cdot H_2^*(f)$)

15. Déduire du spectre la fonction d'autocorrélation en zéro $R_{n_1}(0)$. (on a $\int \mathrm{si\,nc}^2(x)dx = \pi$).

16. On prélève un échantillon de chacun des deux bruits, quelle est la loi de probabilité de ces échantillons ? Montrer qu'ils sont indépendants.

Formulaire

Equivalent BdB

$$s(t) \triangleq p(t)\cdot\sqrt{2}\cdot\cos(\omega_0 t) - q(t)\cdot\sqrt{2}\cdot\sin(\omega_0 t) \qquad s(t) \triangleq \mathrm{Re}\left\{\alpha_s(t)\cdot\sqrt{2}\cdot \mathrm{e}^{j\omega_0 t}\right\}$$

$$\alpha_s(t) = p(t) + jq(t) \qquad S_s(f) = \frac{1}{2}\left\{S_{\alpha_s}(f-f_0) + S_{\alpha_s}(-f-f_0)\right\}$$

MAQ-*M* $\left(\sum_k d_{pk}\cdot g(t-kT_s)\right)\sqrt{2}\cos(\omega_0 t+\phi) - \left(\sum_k d_{qk}\cdot g(t-kT_s)\right)\sqrt{2}\sin(\omega_0 t+\phi)$

Signaux discrets stationnaires suite $\{d_k\}$, $d_k \in \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_M\}$ **avec** $\Pr\{d_k = \alpha_i\} = p_{i,k}$

Moyenne : $E\{d_k\} = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i \cdot p_i$ **Corrélation :** $R_d(n) \overset{\Delta}{=} E\left\{d_k \cdot d_{k-n}^*\right\} = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M} \alpha_i \alpha_j^* \cdot p_{i,j,n}$

Formule de Bennett :

$$S_s(f) = \frac{|G(f)|^2}{T_s}\cdot\left\{\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\left(R_d(n) - |m_d|^2\right)\cdot \mathrm{e}^{-j2\pi f n T_s} + \frac{|m_d|^2}{T_s}\cdot \text{Ш}_{\frac{1}{T_s}}(f)\right\}$$

Energie, distance :

$$E_s = \mathrm{E}\left\{\int |s_i(t)|^2 \,\mathrm{d}t\right\} = \sum_{i=1}^{M} E_i \cdot p_i\,, \quad P_e = E_s D_s = E_b D_b\,, \quad d_{ij}^2 = \int |s_i(t) - s_j(t)|^2 \,\mathrm{d}t = |\mathrm{s}_i - \mathrm{s}_j|^2$$

Critère de Nyquist : **Largeur de bande du filtre en cosinus surélevé :** $B = R(1+\alpha)$ **.**

$$\sum_{n\neq 0\ \forall i,j} R_{s_i s_j}(nT_s) = 0\,, \quad \forall i,j \quad \left(S_i(f)\cdot S_j^*(f)\right) * \frac{1}{T_s}\cdot \text{Ш}_{\frac{1}{T_s}}(f) = R_{s_i s_j}(0) = cste$$

$$\left|G(f)\right|^2 * \text{Ш}_{\frac{1}{T_s}}(f) = \sum_n \left|G\left(f - \frac{n}{T_s}\right)\right|^2 = T_s \cdot R_g(0) = cste$$

Détection en BABG :

$$p(\mathrm{z}/H_i) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(\mathrm{z}-\mathrm{s}_i)^H \cdot \mathrm{R}_b^{-1}\cdot(\mathrm{z}-\mathrm{s}_i)\right)}{(2\pi)^{N/2}\left|\mathrm{R}_b\right|^{1/2}}, \quad (\mathrm{z}-\mathrm{s}_i)^H \frac{\mathrm{R}_b^{-1}}{2}(\mathrm{z}-\mathrm{s}_i) = \frac{|\mathrm{z}-\mathrm{s}_i|^2}{N_0} = \frac{d_{\mathrm{z,s}_i}^2}{N_0} \qquad \mathrm{R}_b = \frac{N_0}{2}\mathrm{I}_N\,,$$

$$L = \frac{p(\mathrm{z}/H_i)}{p(\mathrm{z}/H_j)} \underset{\forall j}{\overset{Z_i}{>}} \frac{\Pr(H_j)}{\Pr(H_i)} \quad \forall j\,, \qquad d_{\mathrm{z,s}_j}^2 - N_0\cdot\log\left(\frac{p_j}{p_i}\right) \underset{\forall j}{\overset{Z_i}{\gtrless}} d_{\mathrm{z,s}_i}^2$$

Probabilité d'erreur :

$$\underset{\text{binaire}}{\Pr\{Ers\}} = \mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right); \qquad \mathrm{Q}\left(\frac{x}{\sigma}\right) = \int_{\frac{x}{\sigma}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,du = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\,du$$

Borne de l'Union $\Pr\{Ers\} \le \sum_{i=1}^{M}\left(\sum_{j\neq i}\mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{d_{ij}^2}{2N_0}}\right)\right)\cdot\Pr\{H_i\}$

Rayleigh $p_\alpha(x) = \frac{x}{\sigma^2}\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\cdot \mathrm{u}(x)$; $\Pr\{Erb\} = \int_0^{+\infty} Q\left(\sqrt{2x}\right)\cdot\frac{1}{\gamma}\cdot\exp\left(-\frac{x}{\gamma}\right)\cdot dx$

Diversité $p_{\gamma_n}(x) = p_{\gamma_{n,1}} * p_{\gamma_{n,2}} * \cdots * p_{\gamma_{n,L}} = \frac{x^{L-1}}{(L-1)!\,\gamma^L}\cdot\exp\left(-\frac{x}{\gamma}\right)\cdot \mathrm{u}(x)$