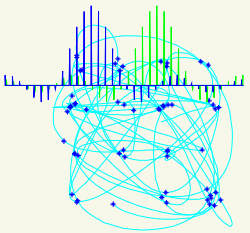


Représentation Mathématique des Signaux Numériques



1 Introductions.

2. Représentation des signaux Numériques.

1 Signal binaire. Modulation en BdB et sur fréquence porteuse, MAQ.

2 Représentation vectorielle, constellation.

3. Propriétés et Répartition spectrale.

1 Energie moyenne, distance.

2 Densité Spectrale de Puissance (DSP)

4. Récepteur Optimal canal BABG stationnaire.

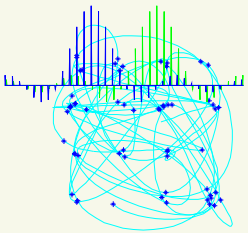
1 Détection au minimum de la probabilité d'erreur.

2 Zones et seuils de décisions.

3 Réalisation du récepteur. Filtre adapté.

4 Interférence Entre Symboles(IES). Critère de Nyquist.

Représentation Mathématique Des Données Numériques et des Formes Analogiques Transmises.



1 1 1 0 1 0 0 1 1

$\{d_k\}$ Temps Discret

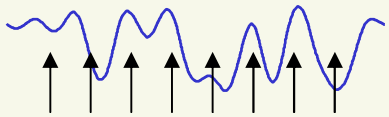
Information Numérique

M valeurs

M valeurs

Détection

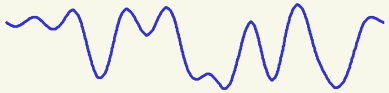
$\in \mathbb{C}^M$



Echantillonnage Symbole

Modulateur

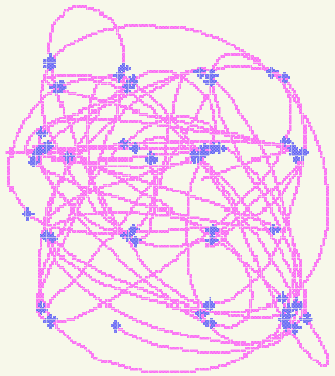
Démodulateur



M formes

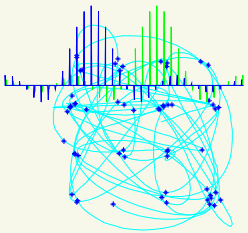
Signal Analogique

Temps Continu $s(t) = \sum_k g_k(t - kT_s)$



Représentation Vectorielle Constellation des M points

Représentation des Signaux Numériques :



Information Numérique : Quantifiée & Discrète

$\Rightarrow$ Formes Analogiques & Emises Régulièrement

Quantifiée :

1 1 1 0 1 0 0 1 1

Alphabet $\mathcal{A}$ de taille M fini borné, représentation mathématique : $d_k \in \mathcal{A} = \{a_1, a_2, \cdots, a_M\}$

Formes Analogiques $s(t)$:

$$d_k \in \{a_1, a_2, \cdots, a_M\}$$

Alphabet de Signaux d'Énergie Finie *Symbole* $\updownarrow$ correspondance biunivoque

$$g_k(t) \in \{s_1(t), s_2(t), \cdots, s_M(t)\}$$

Émise Régulièrement : Période $T_{Symbole}$

Symbole émis à l'instant kT_s : $g_k(t) \rightarrow g_k(t - kT_s)$



Signal émis = superposition de symboles décalés dans le temps : $\boxed{s(t) = \sum_k g_k(t - kT_s)}$

Débit Symbole : $D_s = \frac{1}{T_s}$ en Symbole/s ou Rapidité de Modulation $R = D_s$ en Baud

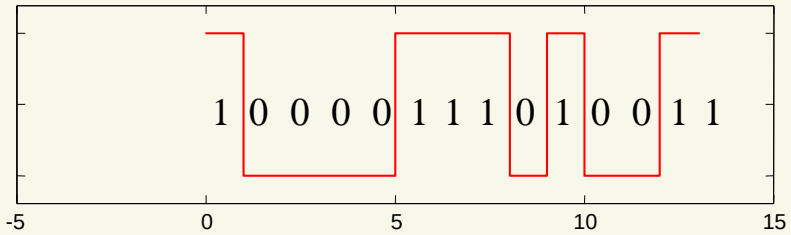
(Émile Baudot 1875 Télégraphe)

Formes simples (2-PAM ou MIA-2)

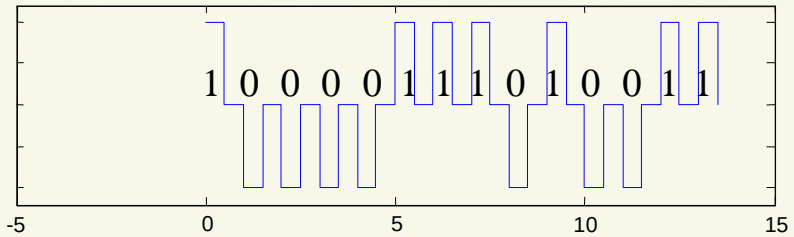
Une seule impulsion $g(t)$ deux états d'amplitude $M = 2$

Deux formes émises $s_1(t) = +g(t)$ et $s_2(t) = -g(t)$

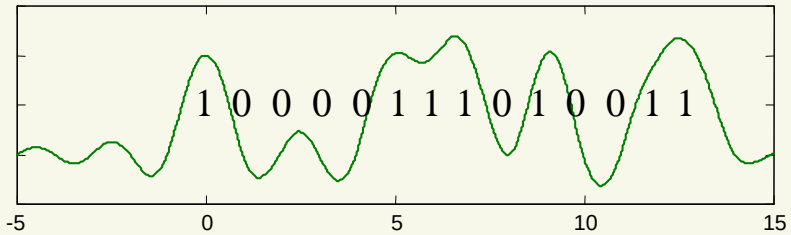
Impulsion NRZ



Impulsion RZ 50%



Impulsion en "cosinus surélevé" pour tansmission sur canal à bande limitée



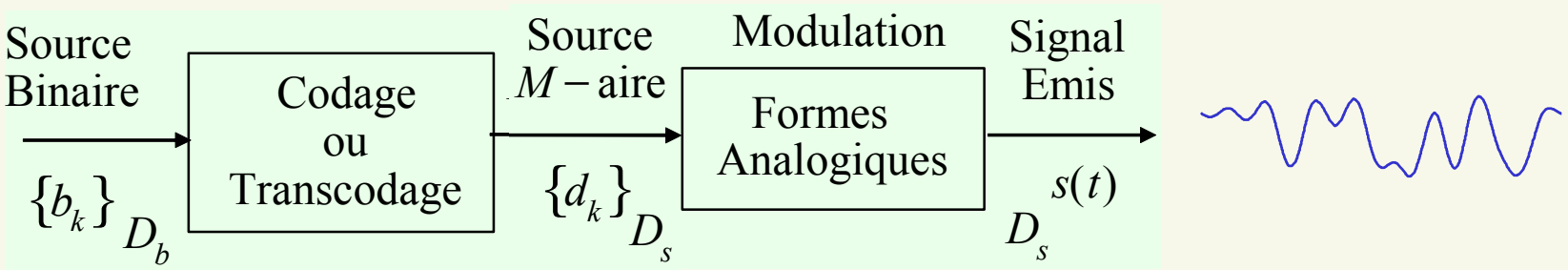
Modulateur (BdB ou Fréquence Porteuse)

Transforme les Données Numériques en Signaux Analogiques

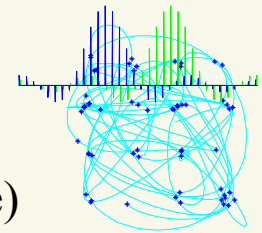
Codage Binaire *M*-aire
(ou transcodage)

Mise en Forme Analogique
= Modulation

1 1 1 0 1 0 0 1 1



Données Numériques :

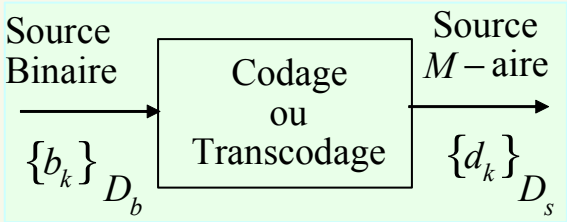


Codage Binaire *M*-aire : (ou transcodage)

Mots Binaires : N bits ($N \cdot T_b$)

101	110	110	100	101
$\alpha_1\alpha_2$	$\alpha_3\alpha_1$	$\alpha_3\alpha_1$	$\alpha_M\alpha_2$	$\alpha_1\alpha_2$

Mots M-aires : P éléments ($P \cdot T_s$)



Synchronisation sans perte de données : $N \cdot T_b \geq P \cdot T_s$

N bits $\rightarrow$ 2^N possibilités

P éléments, M-aire $\rightarrow$ M^P possibilités

Pas de perte si $M^P \geq 2^N$

soit $P \cdot Log_2(M) \geq N \geq P \cdot \frac{T_s}{T_b} = P \cdot \frac{D_b}{D_s} = P \cdot \frac{D_b}{R}$

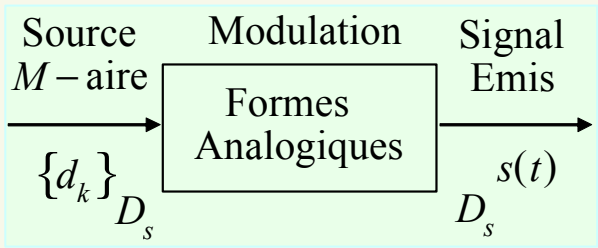
d'où $\boxed{D_b \leq R \cdot Log_2(M)}$

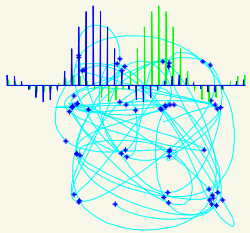
si = Pas de redondance ajoutée

si > Redondance : Tous les états du code ne sont pas utilisés

si < Perte de données

Signaux Numériques Analogiques:





Mise sous Forme Analogique (mise en forme)
= Modulation

$$d_k \xrightarrow{\text{Association directe}} g_k(t) \xrightarrow{\text{Emis en } k\cdot T_s} g_k(t-kT_s)$$

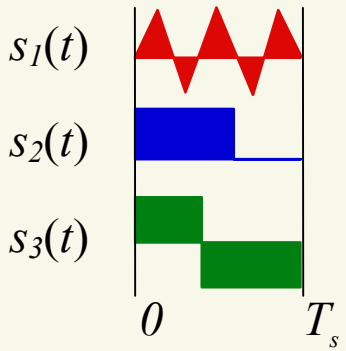
$$d_k \in \{a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_M\}$$

Symbole correspondance ↕ biunivoque

$$g_k(t) \in \{s_1(t), \cdots, s_i(t), \cdots, s_M(t)\}$$

$$\begin{cases} \text{mêmes probabilités} \\ p_i = \Pr\{b_k = \alpha_i\} \\ \quad = \Pr\{g_k(t) = s_i(t)\} \end{cases}$$

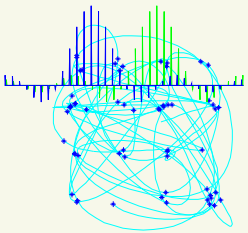
Formes d'onde $s_i(t)$ = signaux déterministes d'énergie finie ($\in \mathcal{L}^2$) $\quad E_i = \int_{-\infty}^{+\infty} |s_i(t)|^2 \, dt$



Distance entre formes : $d_{ij}^2 = \int |s_i(t) - s_j(t)|^2 \, dt$

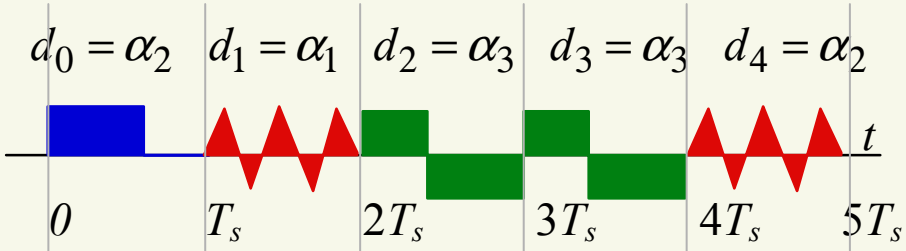
Distance minimale : $d_{\min}^2 = \min_{i \neq j} \{ d_{ij}^2 \}$

Représentation des Signaux Numériques :



Émission d'une suite de symboles

Suite M –aire



Formes $\quad s_2(t) \quad s_1(t-T_s) \quad s_3(t-2T_s) \quad s_3(t-3T_s) \quad s_1(t-4T_s)$

Symboles $\quad g_0(t) = s_0(t)\,, \quad g_1(t) = s_1(t)\,, \quad g_2(t) = s_3(t)\,, \quad g_3(t) = s_3(t)\,, \quad g_4(t) = s_2(t)\,.$

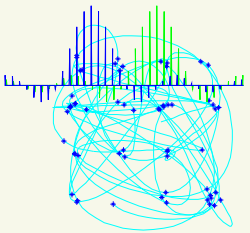
Signal émis = Signal Aléatoire de Puissance finie

$$s(t) = \sum_k g_k(t - kT_s) = \cdots g_0(t) + g_1(t-T_s) + g_2(t-2T_s) + \cdots$$

Puissance moyenne finie : $\boxed{P = E_s D_s = E_b D_b} \Rightarrow E_b = E_s \dfrac{D_s}{D_b}$

Énergie moyenne par bit sur le signal émis = E_b

Énergie moyenne par symbole sur le signal émis = $E_s = \mathrm{E}\left\{\int |s_i(t)|^2 \, \mathrm{d}t\right\} = \sum_{i=1}^{M} E_i \cdot p_i$

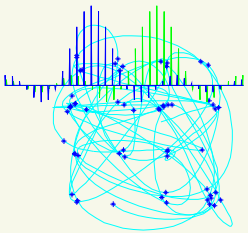


Modulations Linéaires sur Fréquence porteuse

MAQ-*M* MDP-*M*
M-QAM *M*-PSK

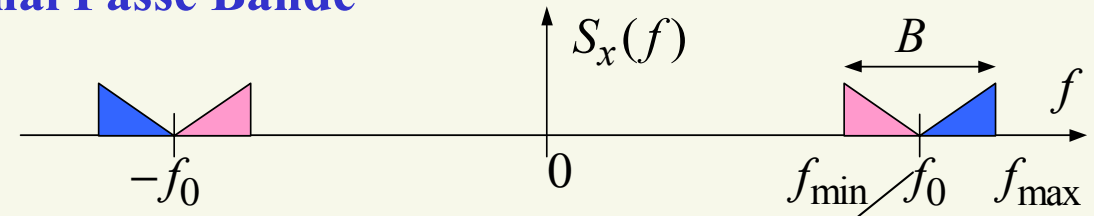
Équivalent en Bande de Base

Equivalent Bande de Base (BdB) (Rappels)



Signal Modulé =
Signal Passe Bande

$$s(t) = p(t)\cdot\sqrt{2}\cdot\cos(\omega_0 t) - q(t)\cdot\sqrt{2}\cdot\sin(\omega_0 t)$$



$$P_s = P_{\alpha_s}$$

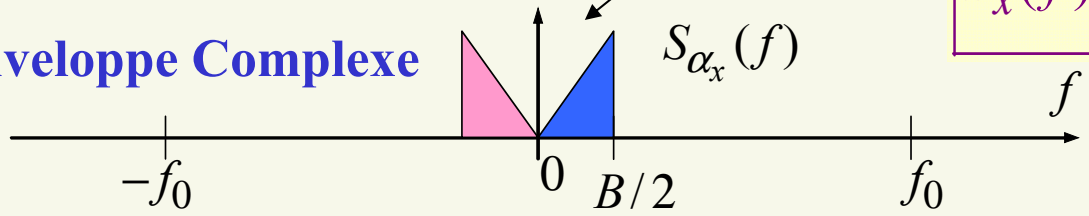
$$s(t) = \mathrm{Re}\left\{\alpha_s(t)\cdot\sqrt{2}\cdot e^{j\omega_0 t}\right\}$$

$$S_p(f) = S_q(f)\ ;\quad S_{pq}(f) = -S_{qp}(f)$$

$$\alpha_s(t) = p(t) + jq(t)$$

$$S_x(f) = \frac{1}{2}\cdot\left(S_{\alpha_x}(f-f_0) + S_{\alpha_x}(-f-f_0)\right)$$

Enveloppe Complexe



Filtrage : $y(t) = s(t) * h(t)$ $\qquad \alpha_y(t) = \alpha_s(t) * \frac{1}{2}\alpha_h(t)$

BABG :

$$\underset{\text{BABG } N_0/2}{b(t)} = \underset{\text{BABG } N_0/2}{p_b(t)}\cdot\sqrt{2}\cdot\cos(\omega_0 t) - \underset{\text{BABG } N_0/2}{q_b(t)}\cdot\sqrt{2}\cdot\sin(\omega_0 t)$$

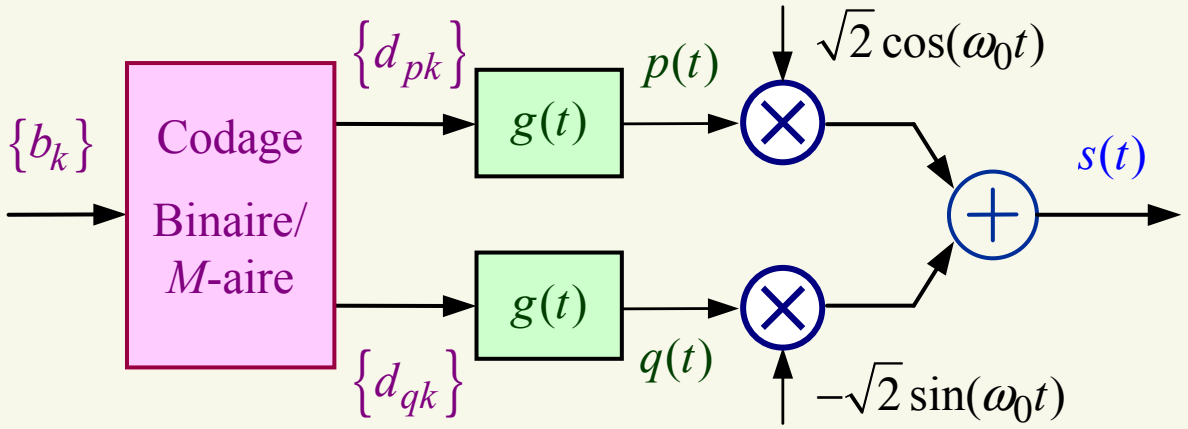
$\longleftrightarrow$ indépendants

réels

$$\underset{\text{BBG } N_0}{\alpha_b(t)} = \underset{\text{BBG } N_0/2}{p_b(t)} + j\,\underset{\text{BBG } N_0/2}{q_b(t)}$$

complexes

Modulateur



Représentation

$$s(t) = \mathrm{Re}\left\{\alpha_s(t)\cdot\sqrt{2}\cdot \mathrm{e}^{j\omega_0 t}\right\} \qquad s(t) = p(t)\cdot\sqrt{2}\cdot\cos(\omega_0 t) - q(t)\cdot\sqrt{2}\cdot\sin(\omega_0 t)$$

$$s(t) = \sum_k d_{pk}\cdot g(t-kT_s)\cdot\sqrt{2}\cdot\cos(\omega_0 t) - \sum_k d_{qk}\cdot g(t-kT_s)\cdot\sqrt{2}\cdot\sin(\omega_0 t)$$

Équivalent en Bande de Base

Composantes pas toujours indépendantes

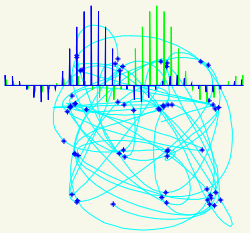
Enveloppe complexe : $\alpha_s(t) = p(t) + jq(t)$

$$\alpha_s(t) = \sum_k d_k\cdot g(t-kT_s)$$

$$d_k = d_{pk} + jd_{qk}$$

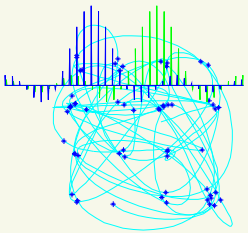
$$p(t) = \sum_k d_{pk}\cdot g(t-kT_s) \quad \text{PAM}$$

$$q(t) = \sum_k d_{qk}\cdot g(t-kT_s) \quad \text{PAM}$$



Densité Spectrale de Puissance

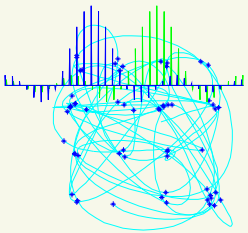
Évalue l'Étalement Spectral des Codes et Modulations et détermine la possibilité de les utiliser et de les multiplexer sur un Canal à Bande Limitée.



Canaux de Transmission.

Les Multiplex son émis sur des Canaux Physiques limités et encombrés :

- Canal Radio
  (Différentes Fréquences, Différents Environnements).
- Canal Acoustique (Air & Eau).
- Câbles.



Canaux Supports de Transmission :

Transmissions sur câbles :

Câbles métalliques (paires torsadées, câbles coaxiaux)

Faibles débits 32kbit/s voie ϕ, 240kbit/s AppleTalk, 100Mbit/s Ethernet.

Ou Faible portée ADSL ~ 1km. (Aff en $k\sqrt{f}\cdot e^{\alpha d}$)

Câbles à fibres optiques. (λ=1,5µm, Aff en αd ~ 0,2 dB/km)

Débits élevés ~ 10Gbit/s, grandes distances >100km.

Ex : Sea-Me-We 3 ; 40 000 km ; 33 pays en Europe, Afrique, Asie Australie ; 39 atterrissages ; 2 paires de fibres WDM de 8×2.5Gbit/s soit 40Gbit/s.

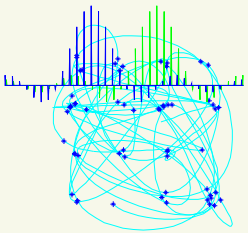
Transmissions Acoustiques :

Sous-marins (~ 10kHz).

Transmissions Optiques :

Infrarouge (Télécommandes) ; Visible, Laser (civil/militaire).

Transmissions Radioélectriques : (Aff en d^{α})



(~ 3kHz - 3MHz) (LF, MF) Diffusion, Communications.
(~ 3MHz - 30MHz) (HF) Diffusion, Balises, Militaire.
(~ 30MHz - 3GHz) (VHF, UHF) Diffusion, Coms, Militaire, Signalisation, Navigation.
(~ 3GHz - 30GHz) (SHF) Radars, Coms FH Satellites.
(> 30GHz) (EHF) Communications µ-cellulaires & Militaire.

Multiples de 10^3
normalisés.

yocto (y), zepto (z),
atto (a), femto (f),
pico(p), nano(n),
micro(µ), mili (m),

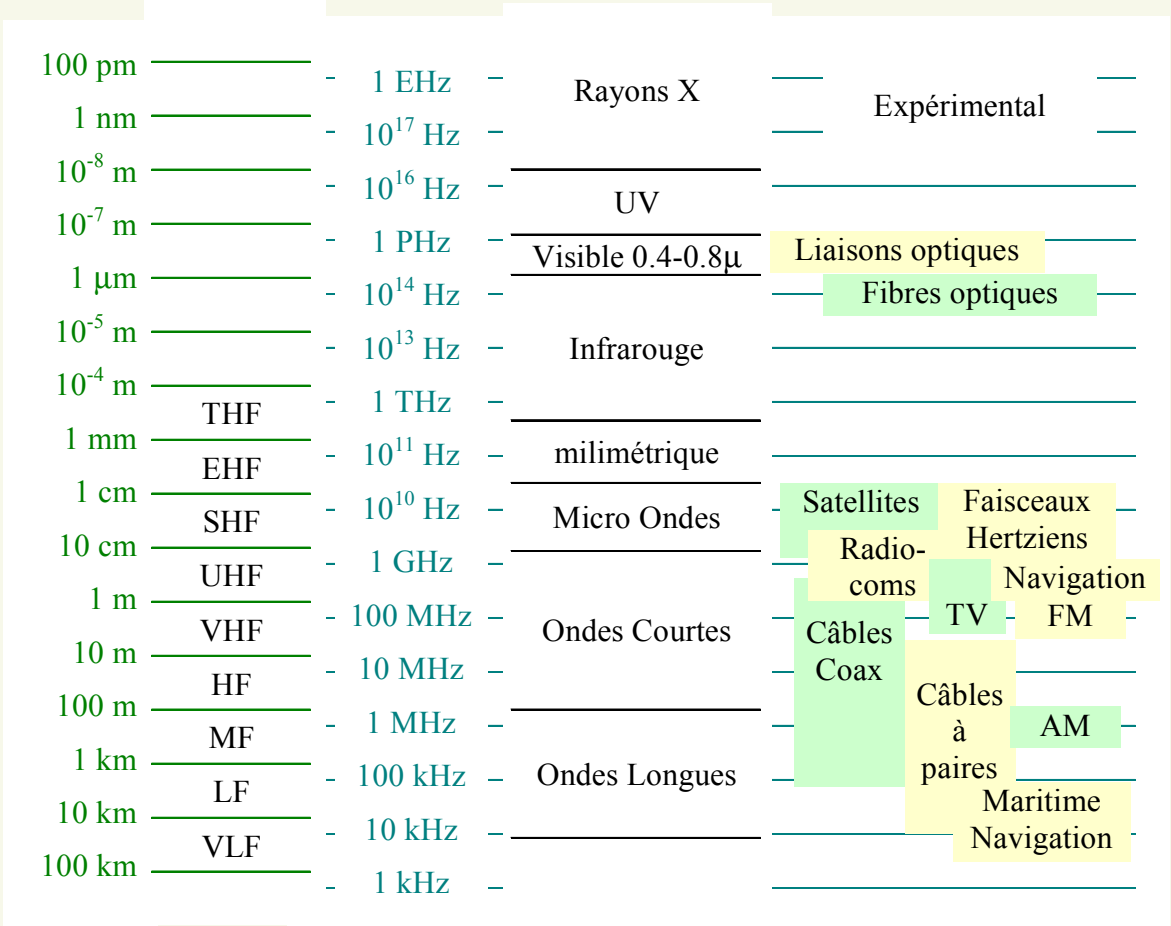
unité,

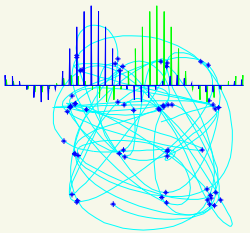
kilo (k), méga (M),

giga (G), tera (T),

penta (P), exa (E),

zetta (Z) et yotta (Y).





Densité Spectrale de Puissance

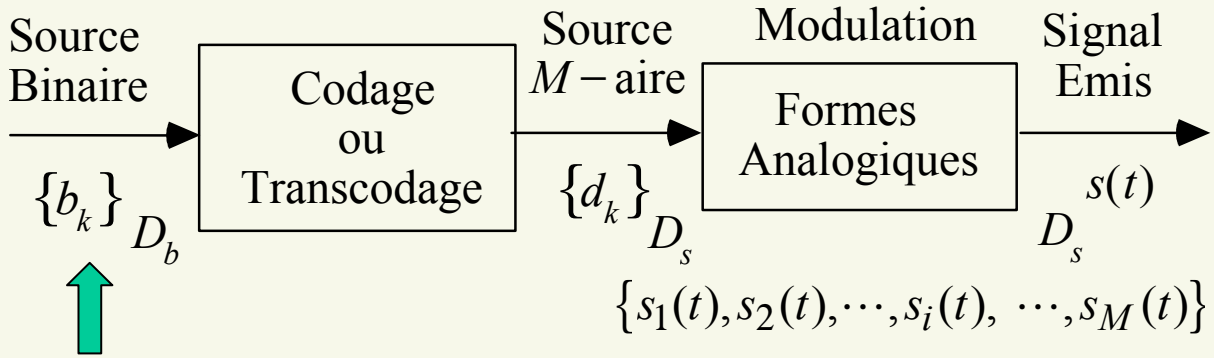
Calcul Nécessaire pour évaluer l'Étalement Spectral des Codes et Modulations.

DSP = TF(FAC)

Fonction d'Auto-Corrélation

Corrélation (FAC) des Signaux Numériques :

Synoptique Émission :



Suite discrète Binaire : $\{b_k\}$

$b_k \in \{0,1\}$ Variable Aléatoire $\quad \Pr\{b_k = 1\} = p_k \quad \Pr\{b_k = 0\} = 1 - p_k$

Suite $\{b_k\}$ Stationnaire $\Rightarrow \quad p_k = p \quad \forall k$

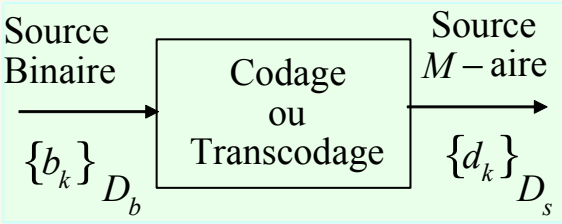
Suite $\{b_k\}$ à éléments Indépendants $\Rightarrow \quad E\{b_k \cdot b_l\} = E\{b_k\} \cdot E\{b_l\}$

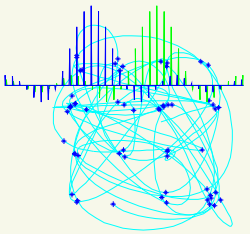
$\Rightarrow \quad E\{b_k \cdot b_l\} = E^2\{b_k\}$ si Stationnaire

Moyenne stationnaire : $E\{b_k\} = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$

Corrélation stationnaire : $R_b(n) \triangleq E\{b_k \cdot b_{k-n}^*\}$, $R_b(0) = E\{|b_k|^2\} = \sigma^2 - |E\{b_k\}|^2 = \sigma^2$ si centré

Corrélation des Signaux Numériques :





Suite *M*-aire : $\{d_k\}$ suite discrète

$d_k \in \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_M\}$ Variable Aléatoire $\Pr\{d_k = \alpha_i\} = p_{i,k}$

Suite $\{d_k\}$ Stationnaire $\Rightarrow$ $p_{i,k} = p_i \, \forall k$

Suite $\{d_k\}$ à éléments Indépendants $E\{d_k \cdot d_l\} = E\{d_k\} \cdot E\{d_l\} = E^2\{d_k\}$ si Stationnaire

Moyenne stationnaire : $$E\{d_k\} = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i \cdot p_i$$

Corrélation stationnaire : $$R_d(n) \triangleq E\left\{d_k \cdot d_{k-n}^*\right\} = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M} \alpha_i \alpha_j^* \cdot p_{ij,n}$$.

$p_{ij,n}$ Loi Jointe des VA $\{d_k\}$ et $\{d_{k-n}\}$

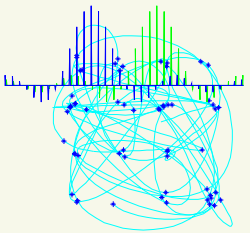
$p_{ij,n} = p_{i,n} \cdot p_{j,k-n}$ si les VA $\{d_k\}$ et $\{d_{k-n}\}$ sont Indépendantes

Suite i.i.d = Suite à éléments indépendants et identiquement distribué (c.a.d stationnaire)

$p_{i,k} = p_{i,l} \quad \forall k,l,i$

A valeurs équiprobables ($p_{i,k} = p_{j,l} = \frac{1}{M} \quad \forall k,l,i,j$) ou à valeurs Non Equiprobales $p_i \neq p_j$

Densité Spectrale de Puissance. (D.S.P)



$S_s(f) = \mathrm{TF}\{R_s(\tau)\}$ avec Fonction d'auto-corrélation (FAC) $R_s(\tau) = \mathrm{E}\{s(t) \cdot s^*(t-\tau)\}$

$$s(t) = \sum_k g_k(t - kT_s + \phi) \qquad g_k(t) \in \{s_1(t), \cdots, s_i(t), \cdots, s_M(t)\}$$

Suite $\{g_k(t)\}$ discrète stationnaire 2nd ordre

$p_i = \Pr\{g_k(t) = s_i(t)\}$ $\quad p_{ij}(n) = \Pr\{g_k(t) = s_i(t) \text{ et } g_{k-n}(t) = s_j(t)\}$ loi jointe

$s(t)$ est Processus Aléatoire Cyclostationnaire période T_s

si ϕ V.A. équirépartie sur $[0, T_s[$ $\Rightarrow$ $s(t)$ est P.A. Stationnaire du 2nd ordre

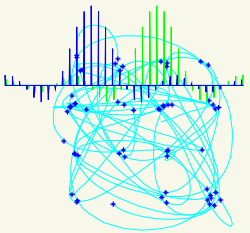
Fonction d'auto-corrélation (FAC) $R_s(\tau) = \mathrm{E}\{s(t) \cdot s^*(t-\tau)\}$

$$R_s(\tau) = \sum_k \sum_l \mathrm{E}\left\{ \underbrace{g_k(t - kT + \phi) \cdot g_l^*(t - lT + \phi - \tau)}_{\text{2 VA = 2 échantillons du même PA}} \right\} \qquad R_s(\tau) = \sum_k \sum_n \mathrm{E}\{g_k(u) \cdot g_{k-n}^*(u + nT - \tau)\}$$

Calcul de l'espérance

1) Si ($n \neq 0$) Il y a **3 VA** : g_k, g_{k-n} discrètes et ϕ indépendante continue
2) Si ($n = 0$) Il y a **2 VA** : g_k discrète et ϕ indépendante continue

Densité Spectrale de Puissance. (DSP)



$$p_i = \Pr\{g_k(t) = s_i(t)\}$$

$$p_{ij}(n) = \Pr\{g_k(t) = s_i(t) \text{ et } g_{k-n}(t) = s_j(t)\} \quad \text{loi jointe}$$

Fonction d'auto-corrélation (FAC) $\qquad R_s(\tau) = \mathrm{E}\{s(t) \cdot s^*(t-\tau)\}$

$$R_s(\tau) = \frac{1}{T_s}\left(\sum_i R_{s_i}(\tau) \cdot p_i \; + \sum_{n \neq 0} \left(\sum_i \sum_j R_{s_i s_j}(\tau - nT_s) \cdot p_{ij}(n) \right) \right)$$

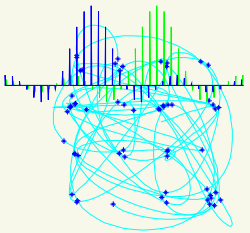
DSP $\qquad R_{s_i s_j}(\tau) * \delta(\tau - nT) \xrightarrow{\text{TF}} S_i(f) \cdot S_j^*(f) \cdot \mathrm{e}^{-j2\pi fnT}$

- Modulation d'impulsion en amplitude (MIA) ou (**PAM**) $\qquad g_k(t) = d_k \cdot g(t)$

$$s(t) = \sum_k d_k \cdot g(t - kT_s + \phi) \qquad s_i(t) = \alpha_i \cdot g(t) \qquad d_k \in \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_M\}$$

DSP du PAM. = **Formule de Bennett** (1960)

$$S_s(f) = \frac{|G(f)|^2}{T_s} \cdot \left\{ \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left(R_d(n) - |m_d|^2 \right) \cdot \mathrm{e}^{-j2\pi fnT_s} + \frac{|m_d|^2}{T_s} \cdot \text{Ш}_{\frac{1}{T_s}}(f) \right\}$$



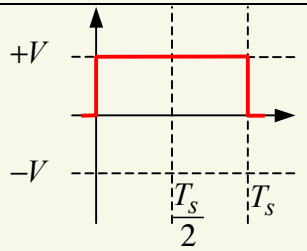
Exemple de Codes et leurs DSP

(Calculs en TDs)

Codes élémentaires en BdB : Formes simples pour MIA (PAM)

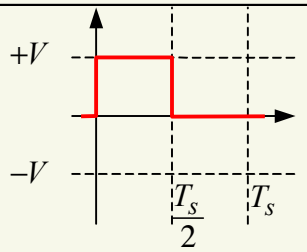
NRZ

Impulsion NRZ : $g(t) = \begin{cases} A & t \in [0,T] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$



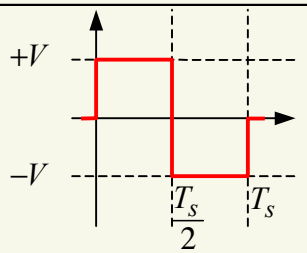
RZ50%

Impulsion RZ 50% : $g(t) = \begin{cases} A & t \in [0,\frac{T}{2}] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$



Biphase ou Manchester

Impulsion Horloge : $g(t) = \begin{cases} +1 & t \in [0,\frac{T}{2}] \\ -1 & t \in [\frac{T}{2},T] \end{cases}$



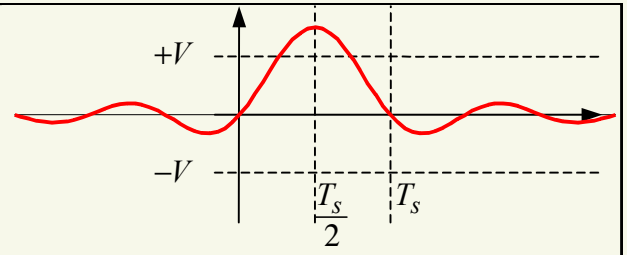
$G(f) \equiv \Pi_{\frac{1}{T_s}}(f)$

pour canal passe bande

(Approximation)

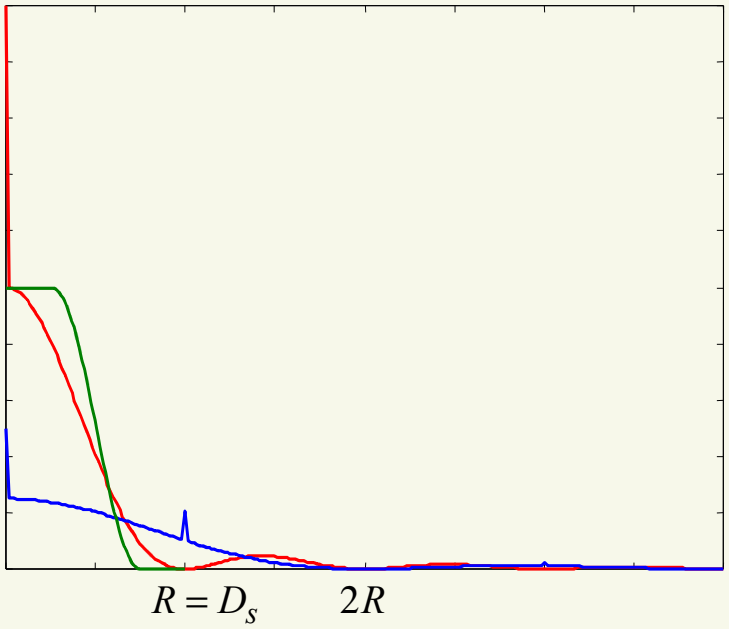
Impulsion sinus cardinal

$g(t) = \text{sinc}\left(\frac{2\pi}{T_s}\left(t - \frac{T_s}{2}\right)\right)$

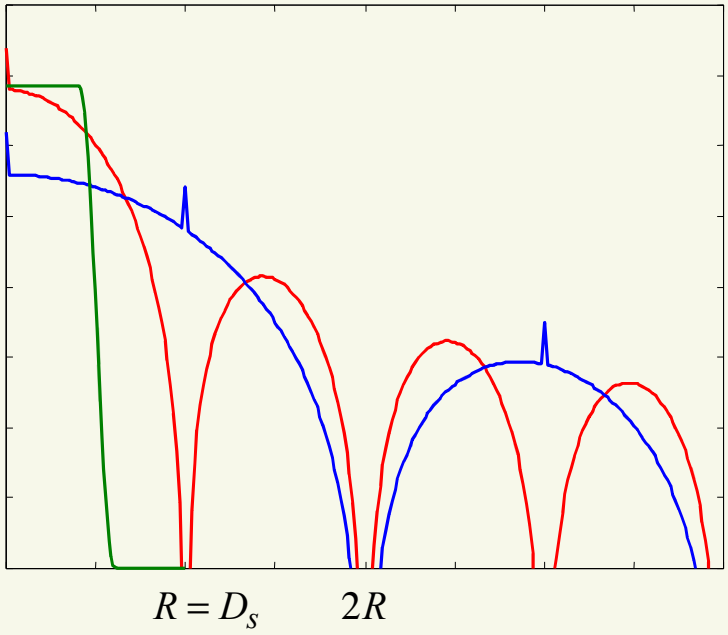


DSP Codes Binaire (2-PAM) : Formes simples.

Tracés en linéaire



Tracés en décibel



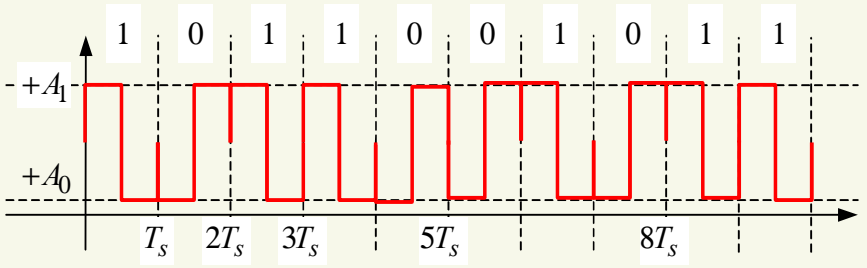
Forme NRZ

Forme RZ 50%

Forme en “cosinus surélevé” pour tansmission sur canal à bande limitée

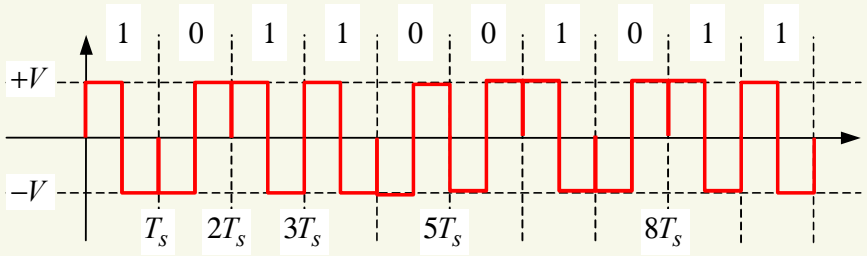
Code Manchester (Fibres optiques)

$$s_1(t)=\begin{cases} A_0 & t\in\left[0,\frac{T}{2}\right] \\ A_1 & t\in\left[\frac{T}{2},T\right] \end{cases} \quad s_2(t)=\begin{cases} A_1 & t\in\left[0,\frac{T}{2}\right] \\ A_0 & t\in\left[\frac{T}{2},T\right] \end{cases}$$



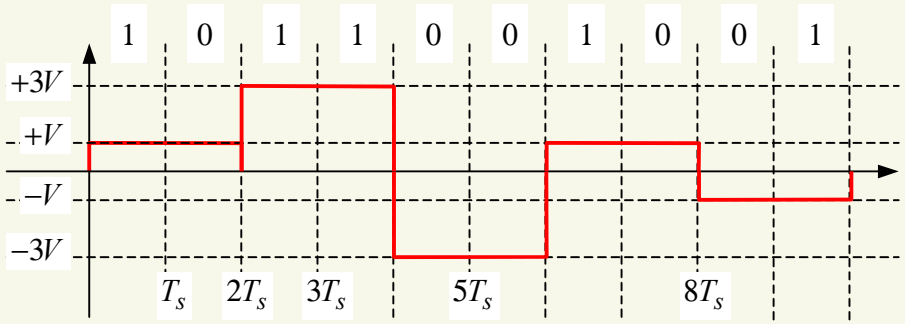
Code Biphase

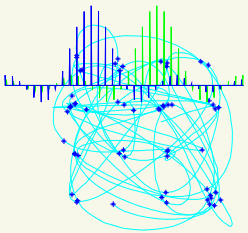
Ethernet 10Base5, 10Base2, 10BaseT, 10BaseFL.



Code 2B1Q

RNIS/ISDN et HDSL.





Codes à inversion des "1" (**AMI** alternate mark inversion)

MAMI modified AMI, inversion des "0"

Bipolaire d'ordre 1 (HDB_3 Câbles 2, 8 Mbit/s)

$$\begin{cases} 0 \rightarrow 0 \\ 1 \rightarrow \pm 1 \text{ à l'inverse du 1 précédent} \end{cases}$$

CMI (coded mark inversion) ou 1B/2B (Fibres optiques)

$$\begin{cases} 0 \rightarrow -+ \\ 1 \rightarrow \begin{cases} ++ & \text{inverse} \\ -- & \text{du 1 précédent} \end{cases} \end{cases}$$

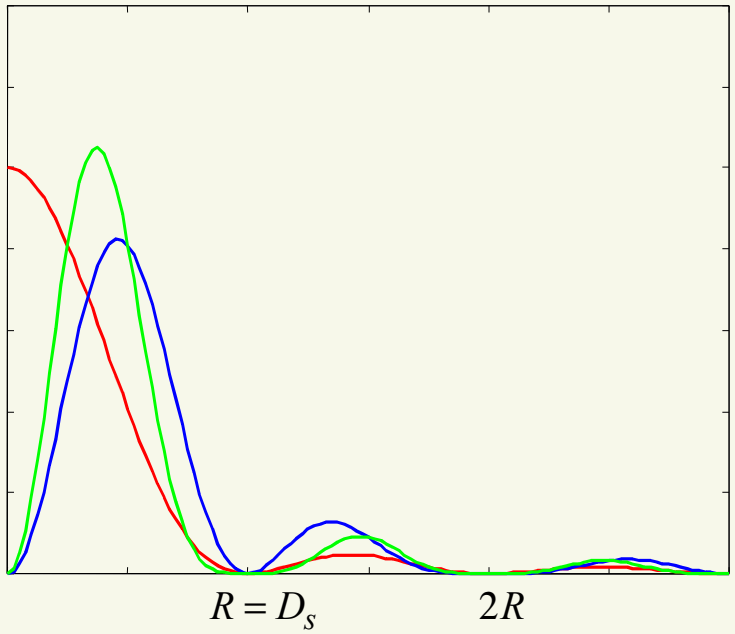
Code de Miller (delay modulation) (MDP2 ou BPSK. Enregistrements magnétiques)

$$\left.\begin{cases} 0 \rightarrow \begin{cases} ++\cdots 1 \\ --\cdots 2 \end{cases} \\ 1 \rightarrow \begin{cases} +-\cdots 3 \\ -+\cdots 4 \end{cases} \end{cases} \text{avec} \quad \begin{matrix} 0 \rightarrow 1 \\ 1 \rightarrow 0 \end{matrix} \right\} \text{ Continuité de niveau}$$

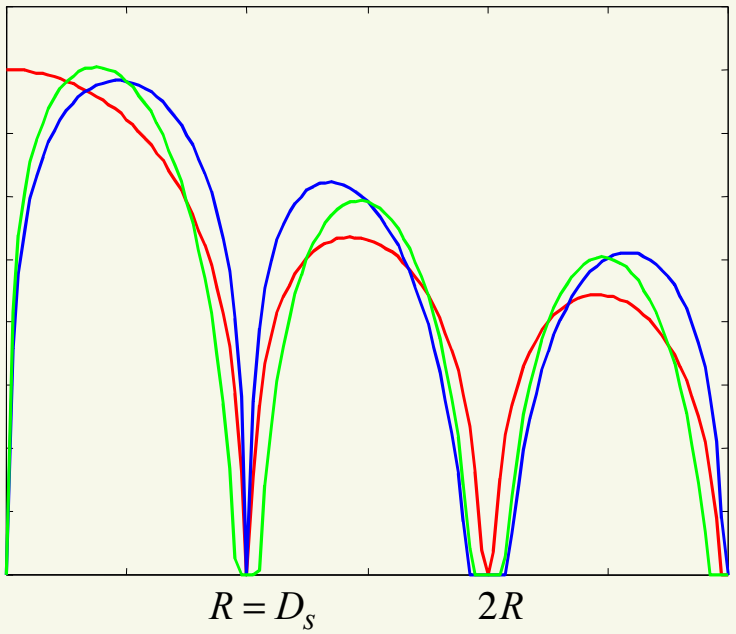
Codes élémentaires en BdB :

Le codage modifie la DSP

Tracés en linéaire



Tracés en décibel

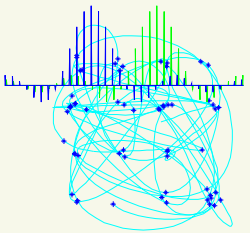


Binaire NRZ

Bipolaire d'ordre 1 NRZ

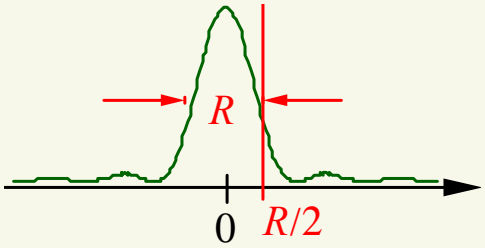
Bipolaire d'ordre 1 RZ 50% (HDB$_3$ Câbles 2, 8 Mbit/s)

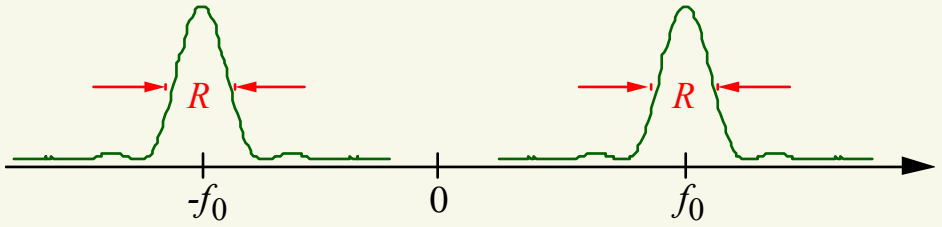
Modulations Numériques Linéaires PAM & QAM



DSP $S_\alpha(f)$ **PAM NRZ**

$$S_s(f)=\frac{1}{2}\{S_\alpha(f-f_0)+S_\alpha(-f-f_0)\}$$





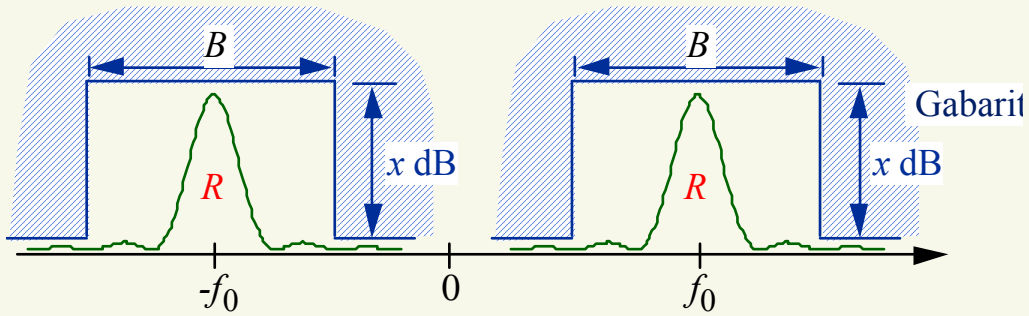
Efficacité spectrale (Modulation Filtrée. W largeur de bande de la modulation)

$$\eta \triangleq \frac{D_b}{W} < \frac{D_b}{R/2} = 2Log_2M \qquad \eta \triangleq \frac{D_b}{W} < \frac{D_b}{R} = Log_2M \qquad (\eta \text{ En bit/s/Hz})$$

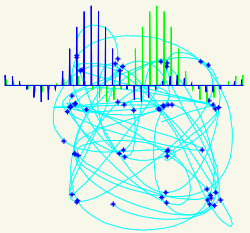
Filtrage Nyquist

$$R < W = R(1+\alpha) < 2R$$

Modulation Non Filtrée $\Rightarrow$ Gabarit en Fréquence (Largeur de Bande / Affaiblissement)



Représentation Vectorielle des Symboles émis.



1 1 1 0 1 0 0 1 1

$\{d_k\}$ Temps Discret

Information Numérique

M valeurs

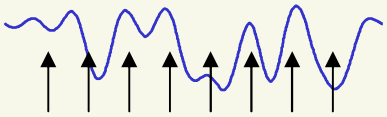
M valeurs

Modulateur

Démodulateur

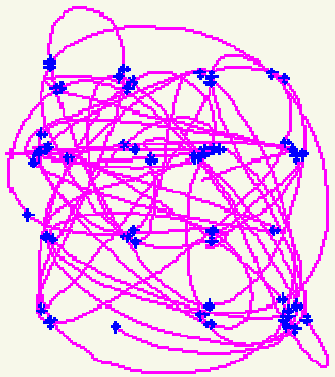
Détection

$\in \mathbb{C}^M$

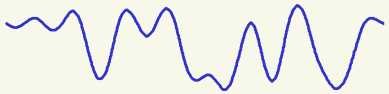


Echantillonnage **Symbole**

Représentation Vectorielle Constellation des M points



M formes

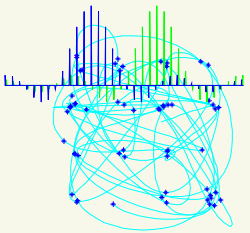


Signal Analogique

Temps Continu $s(t) = \sum_k g_k(t - kT_s)$

Représentation Vectorielle :

NRZ, RZ, Modulations ….



Des formes émises $g_k(t) \in \{s_1(t), \cdots, s_i(t), \cdots, s_M(t)\}$

Base orthonormée (arbitraire) : $\{\varphi_1(t), \cdots, \varphi_i(t), \cdots, \varphi_N(t)\}$ $N \geq M$

Produit scalaire : dans $\mathcal{L}^2$

$$\begin{cases} \left(\varphi_i(t), \varphi_j(t)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_i(t) \cdot \varphi_j^*(t)\, dt \\ \left(\varphi_i(t), \varphi_i(t)\right) = 1 \quad \text{et} \quad \left(\varphi_i(t), \varphi_j(t)\right) = 0 \end{cases}$$

Espace vectoriel associé :

(Base de $\mathbb{C}^N$)

$$\begin{cases} \varphi_1(t) \rightarrow (1, 0, \ldots, 0)^T = \boldsymbol{\varphi}_1 \\ \boldsymbol{\varphi}_i^H \cdot \boldsymbol{\varphi}_i = |\boldsymbol{\varphi}_i|^2 = 1 \quad \text{et} \quad 2\mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{\varphi}_i^H \cdot \boldsymbol{\varphi}_j\right\} = 0 \end{cases}$$

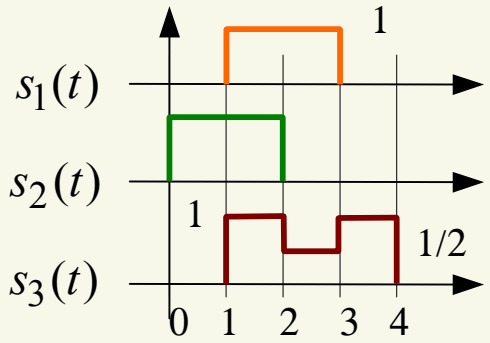
Formes émises :

$$\begin{cases} s_1(t) \rightarrow (s_{11}, s_{12}, \ldots, s_{1N})^T = \mathbf{s}_1 \\ \boldsymbol{\varphi}_j^H \cdot \mathbf{s}_1 = s_{1j} = \left(s_1(t), \varphi_j(t)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) \cdot \varphi_j^*(t)\, dt \end{cases}$$

$$s_1(t) = \sum_{n=1}^{N} s_{1n}\, \varphi_n(t)$$

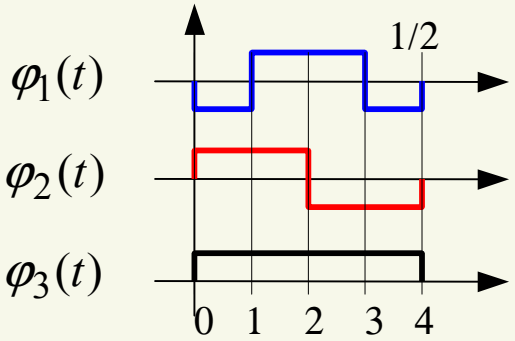
Reconstruction possible si l'espace engendré par la base des fonctions contient l'espace des formes.

Représentation Vectorielle. Exemple : Code à 3 formes



Formes $\{s_1(t), \cdots, s_i(t), \cdots, s_M(t)\}$

$M = 3$



$N = 3$

Base orthonormée :

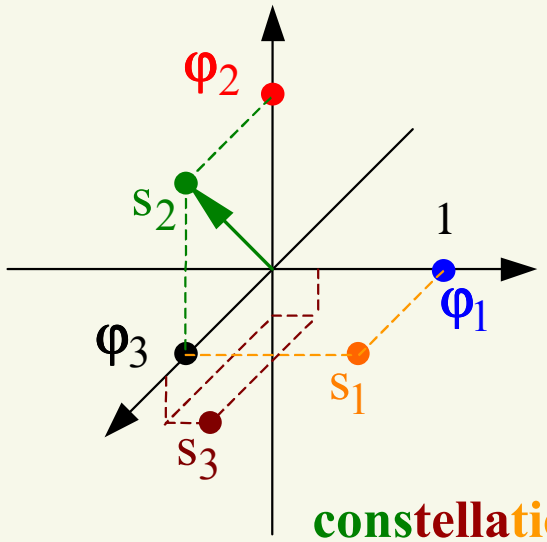
$\{\varphi_1(t), \cdots, \varphi_i(t), \cdots, \varphi_N(t)\}$ $\quad N \geq M$

Formes émises :

$$\begin{cases} s_1(t) \rightarrow (s_{11}, s_{12}, \ldots, s_{1N})^T = \mathbf{s}_1 \\ \boldsymbol{\varphi}_j^H \cdot \mathbf{s}_1 = s_{1j} = \left(s_1(t), \varphi_j(t)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) \cdot \varphi_j^*(t)\, dt \end{cases}$$

$$s_1(t) = \sum_{n=1}^{N} s_{1n}\, \varphi_n(t)$$

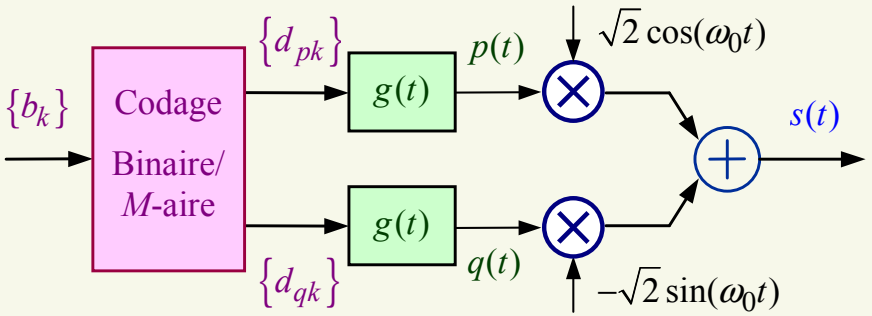
Reconstruction possible si l'espace engendré par la base des fonctions contient l'espace des formes.



Exemple : Modulation d'Amplitude de Deux Porteuses en Quadrature

MAQ-*M*

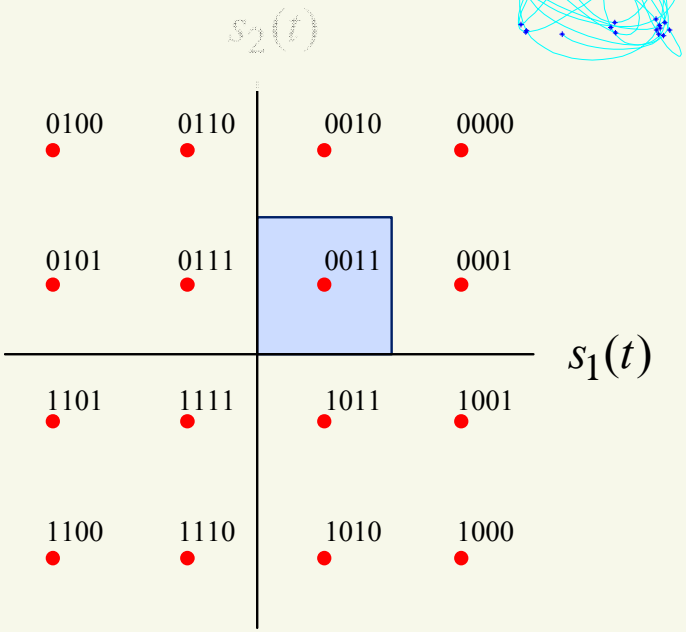
M-QAM



$$s_1(t) = g(t) \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\omega_0 t)$$

$$s_2(t) = g(t) \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega_0 t)$$

$$M = 2^N$$



MAQ-16

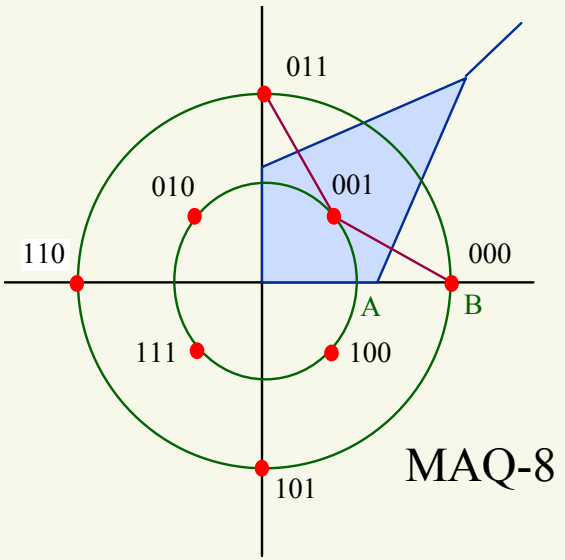
N Pair⇒ MAQ-4, 16, 64, 256, ...

Voie en Phase $d_{pk} \in \{\pm 1, \pm 3, \ldots, \pm(\sqrt{M} - 1)\}$

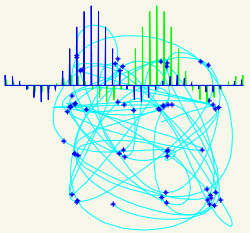
Voie en Quadrature $d_{qk} \in \{\pm 1, \pm 3, \ldots, \pm(\sqrt{M} - 1)\}$

N Impair ⇒ MAQ-8, 32, 128, 512, ...

Autres Constellations Croix, Carrés Bords Arrondis



MAQ-8



1 Introductions.

2. Représentation des signaux Numériques.

1 Signal binaire. Modulation en BdB et sur fréquence porteuse, MAQ.

2 Représentation vectorielle, constellation.

3. Propriétés et Répartition spectrale.

1 Energie moyenne, distance.

2 Densité Spectrale de Puissance (DSP)

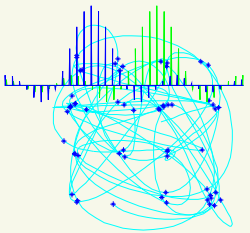
4. Récepteur Optimal canal BABG stationnaire.

1 Détection au minimum de la probabilité d'erreur.

2 Zones et seuils de décisions.

3 Réalisation du récepteur. Filtre adapté.

4 Interférence Entre Symboles(IES). Critère de Nyquist.



5. Calcul de performance.

1 Taux d'Erreur cas de signaux binaire antipodaux, orthogonaux.

2 Cas M-aire. Borne de l'Union.

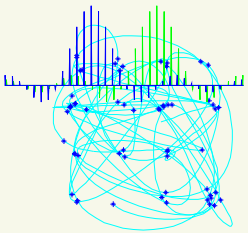
3 Canal Mobile et Performances en Diversité.

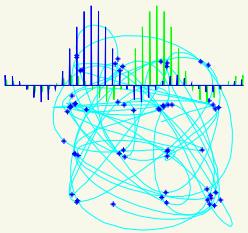
6. Modulations Numériques sur Fréquence Porteuse.

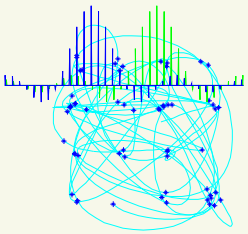
1 Modulations Linéaires. Modulations de Fréquence.

2 Comparaison des modulations. Efficacité / performance.

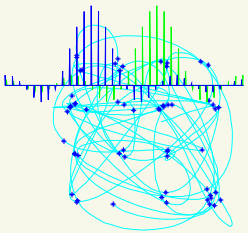
3 OFDM. Etalement de spectre. Multiplexage







Codes élémentaires en BdB :



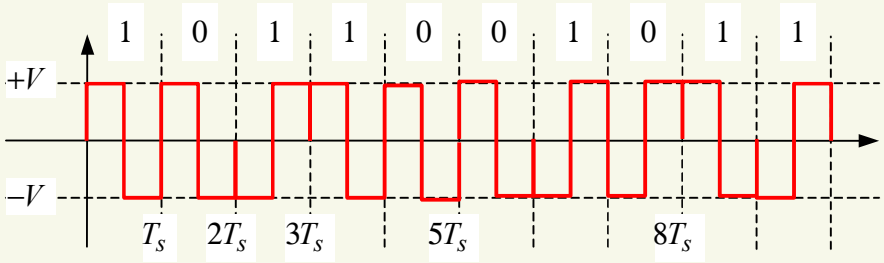
Codes Différentiels Relations récursives $a_k = a_{k-1} \oplus b_k$

NRZI (No Return to Zero Inverted). (SDDI et bus USB)

$$\begin{cases} 0 \rightarrow \text{conserve l'état courant} \\ 1 \rightarrow \pm 1 \text{ à l'inverse du 1 précédent} \end{cases}$$

Biphase différentiel

(Apple Talk)



MLT3 (Multi Level Transmission)

(CDDI, Fast Ethernet (100BaseTX, 100BaseT4), ATM)

$$\begin{cases} 0 \rightarrow \text{conserve l'état courant} \\ 1 \rightarrow \text{séquence } +V, 0, -V, +V, 0, -V, \text{ etc.} \end{cases}$$

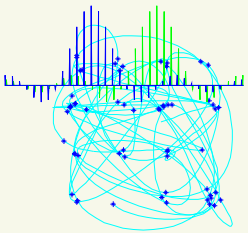
Spectre très compact car peu de transitions

Codes à Réponse Partielle Relation Markovienne > 1 $\Rightarrow$ IES connues

Permet de déformer le Spectre par Filtrage RIF de la suite $\{b_k\}$: $d_k = \sum_{n=0}^{N} c_n b_{k-n}$)

et/ou correction d'erreurs au décodage (ex **code duobinaire** $d_k = b_k + b_{k-1}$)

Codes élémentaires en BdB :



Codes à Somme Bornée

Somme courante Bornée ⇒ DSP nulle en BF

Codes HDB3 B8ZS

HDBn (Haute Densité Binaire d'ordre n).
BnZS (Bipolar with n Zero Substitution).

Hiérarchie E1, E2 pour le HDB3
Hiérarchie T1 pour le B8ZS et hiérarchie T2 pour le B3ZS.

Codes binaire/binaire

Bits supplémentaires pour détection et correction d'erreurs.

5B/6B et 12B/1P/1C Manchester en transmission optique
4B/5B sur Fast Ethernet et le 8B/10B sur Gigabit Ethernet sous forme NRZI ou MLT3.

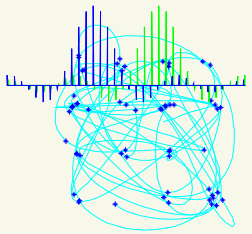
Codes à Alphabet

4B/3T, 12B/1P/1C.

Table de conversion

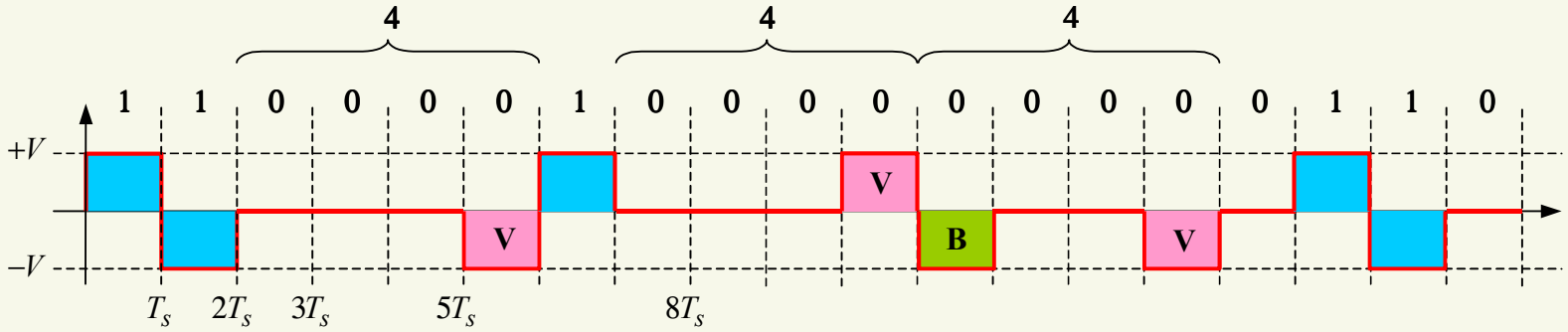
Code 4B/3T Quatre binaires pour trois ternaires
câbles à 34, 140 Mbit/s de la hiérarchie E3, E4.

C'est aussi un code à somme bornée



Code HDB3 (Haute Densité Binaire d'ordre 3). (Câbles 2, 8 Mbit/s).

Bipolaire d'ordre 1 avec supression des zéros (Viols & Bourrages)



Moyenne nulle $\Rightarrow$ pas de BF.

DSP compliquée. Mémoire $\Rightarrow$ Chaîne Markov à beaucoup d'états.

