

## 4. Récepteur Optimal canal BABG stationnaire.

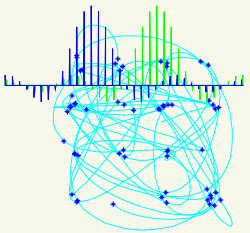
1 Détection au minimum de la probabilité d'erreur.
2 Zones et seuils de décisions.
3 Réalisation du récepteur. Filtre adapté.
4 Interférence Entre Symboles(IES). Critère de Nyquist.

## 5. Calcul de performance.

1 Taux d'Erreur cas de signaux binaire antipodaux, orthogonaux.
2 Cas M-aire. Borne de l'Union.
3 Canal Mobile et Performances en Diversité.

## 6. Modulations Numériques sur Fréquence Porteuse.

1 Modulations Linéaires. Modulations de Fréquence.
2 Comparaison des modulations. Efficacité / performance.
3 OFDM. Etalement de spectre. Multiplexage

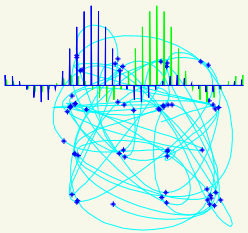




# Evaluation de la Probabilité d 'Erreur Résiduelle Du Récepteur Optimal BABG

## Reste-t-il des bits faux ?!

# Détection au Minimum de Probabilité d'Erreur



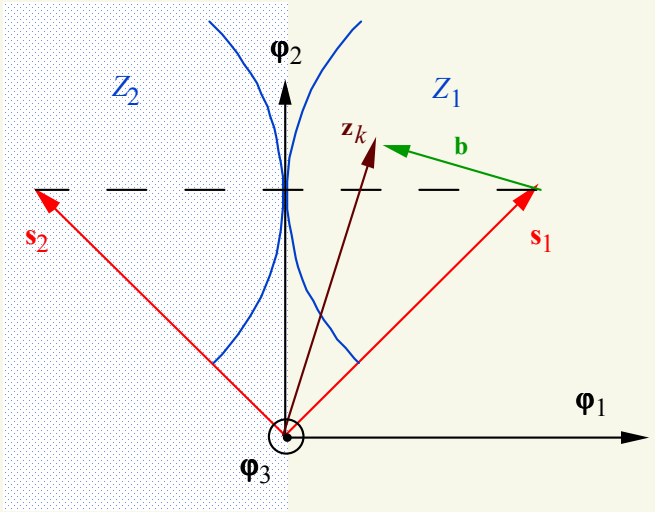
**Fonctionnement : si $\mathbf{z} \in Z_i \Rightarrow$ décide symbole n° *i* .**

$$\Pr\{Ers\} = 1 - \Pr\{Dc\} \qquad \min\left(\Pr\{Err\}\right) = \max\left(\Pr\{Dc\}\right)$$

Détection symbole par symbole

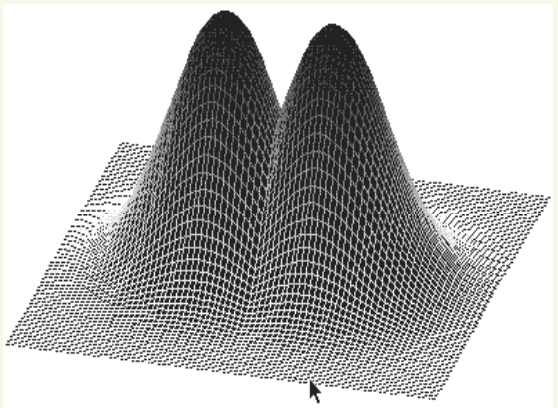
*M* Hypothèses : $H_i = \{\text{le symbole } g_k(t) = s_i(t)\}$

$$\Pr\{Dc\} = \sum_{i=1}^{M} \Pr\{(\mathbf{z} \in Z_i) \,/\, H_i\} \Pr\{H_i\}$$



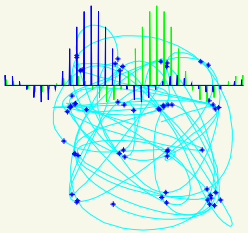

$p(\mathbf{z}/H_i)$ loi Gaussienne centrée sur $\mathbf{s}_i$

$$p(\mathbf{z}/H_i) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\left|\mathbf{R}_b\right|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{z}-\mathbf{s}_i)^H \cdot \mathbf{R}_b^{-1} \cdot (\mathbf{z}-\mathbf{s}_i)\right)$$



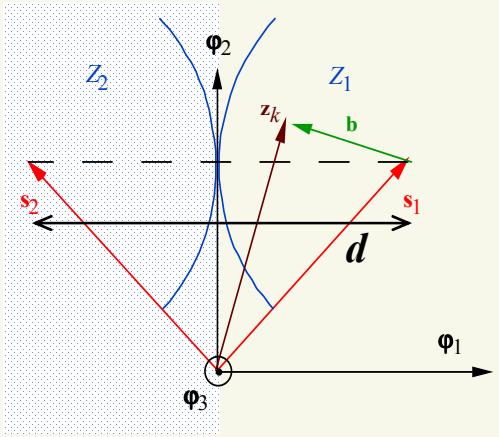
$$\Pr\{Dc\} = \sum_{i=1}^{M} \int_{Z_i} \left( p(\mathbf{z}/H_i) \right) \cdot \Pr\{H_i\} = \sum_{i=1}^{M} \int_{Z_i} \left( \mathcal{N}(\mathbf{s}_i, \mathbf{R}_b) \right) \cdot p_i$$

# Calcul de la Probabilité d'Erreur par Symbole



## Cas Binaire équiprobable (bissectrice à $d/2$)

**on intègre sur le demi espace**




$$\int_{Z_1}\left(\mathcal{N}(\mathbf{s}_1,\mathbf{R}_b)\right)=\int_{-d/2}^{+\infty}\left(\mathcal{N}\left(0,\sigma_b^2\right)\right)\,dz_1=Q\left(\frac{-d}{2\sigma_b}\right)=Q\left(-\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right)$$

**Bruit à Composantes indépendantes :** $\mathbf{R}_b=\sigma_b^2\,\mathbf{I}_N \qquad \sigma_b^2=\frac{N_0}{2}$

$$\Rightarrow \quad \Pr\{Dc\}=\sum_{i=1}^{M}\Pr\{(\mathbf{z}\in Z_i)\,/\,H_i\}\cdot p_i=Q\left(-\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right)\cdot\underbrace{\{p_1+p_2\}}_{=1}$$

$$\Pr\{Ers\}=1-\Pr\{Dc\}=Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right)$$

Binaire

## Fonction de Marcum

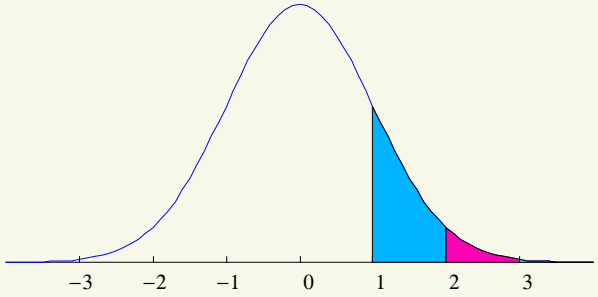
$$Q\left(\frac{x}{\sigma}\right)=\int_{\frac{x}{\sigma}}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,du=\int_{x}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\,du$$

$$Q(-\infty)=1 \qquad Q(0)=1/2 \qquad Q(+\infty)=0 \qquad Q(-x)=1-Q(x)$$

## Fonction de Marcum

$$Q\left(\frac{x}{\sigma}\right)=\int_{\frac{x}{\sigma}}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,du=\int_{x}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\,du$$

$$Q(-\infty)=1 \qquad Q(0)=1/2 \qquad Q(+\infty)=0 \qquad Q(-x)=1-Q(x)$$




$$Q(1)=0.1587$$
$$Q(2)=0.0228$$
$$Q(3)\approx 0.00135$$
$$Q(4)\approx 3.2\cdot 10^{-5}$$
$$Q(7)\approx 1.3\cdot 10^{-12}$$

Décroissance très rapide

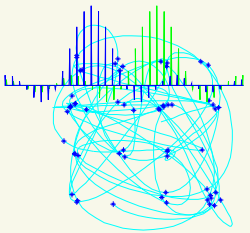
$$Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right)>>Q\left(\sqrt{\frac{2d^2}{2N_0}}\right)$$

## Fonction d'Erreur

$$\frac{1}{2}\mathrm{Erfc}\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}\int_{\frac{x}{\sigma\sqrt{2}}}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-u^2}\,du=\int_{x}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\,du$$

$$\mathrm{Erf}(x)=\frac{1}{2}-\mathrm{Erfc}(x)=\int_0^x\frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-u^2}\,du \qquad \frac{1}{2}\mathrm{Erfc}\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{2}}\right)=Q\left(\frac{x}{\sigma}\right)$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{Erfc}(-\infty)=1 \qquad \frac{1}{2}\mathrm{Erfc}(0)=\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2}\mathrm{Erfc}(+\infty)=0$$

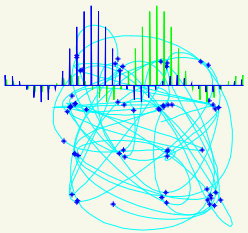


# Probabilité d 'Erreur

## Erreurs Résiduelles des Modulations M-aires les plus élémentaires. Cas sans mémoire à BABG

Formules simples ?!
Courbes d'Erreur

# Probabilité d'Erreur par Symbole

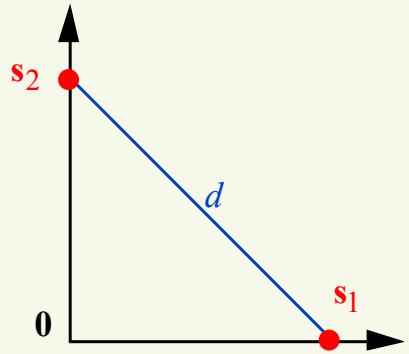


$$d_{ij}^2 = \left|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j\right|^2 = E_{s_i} + E_{s_j} - 2\,\mathrm{Re}\left\langle \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j \right\rangle = E_{s_i} + E_{s_j}$$

si même énergie $E_s = E_i \cdot \sum_i p_i = E_i$ si équiprobables $E_s = \frac{1}{M} \cdot \sum_i E_i$

## Binaire Orthogonaux

$\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_1$ **même énergie**




$$\Pr\{Ers\} = 1 - \Pr\{Dc\} = Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right)$$

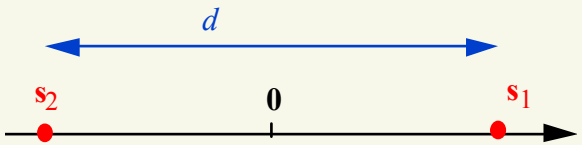
$$d_{12}^2 = 2E_s \quad \text{et} \quad d_{12}^2 = 2E_b \quad (D_s = D_b)$$

$$\Pr\{Ers\} = \Pr\{Erb\} = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

## Binaire Antipodaux

$\mathbf{s}_2 = -\mathbf{s}_1$ **même énergie**

$$d_{12}^2 = 4 \cdot \left|\mathbf{s}_1\right|^2 = 4 \cdot E_s = 4 \cdot E_b \quad \text{si } D_s = D_b$$




$$\Pr\{Ers\} = \Pr\{Erb\} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

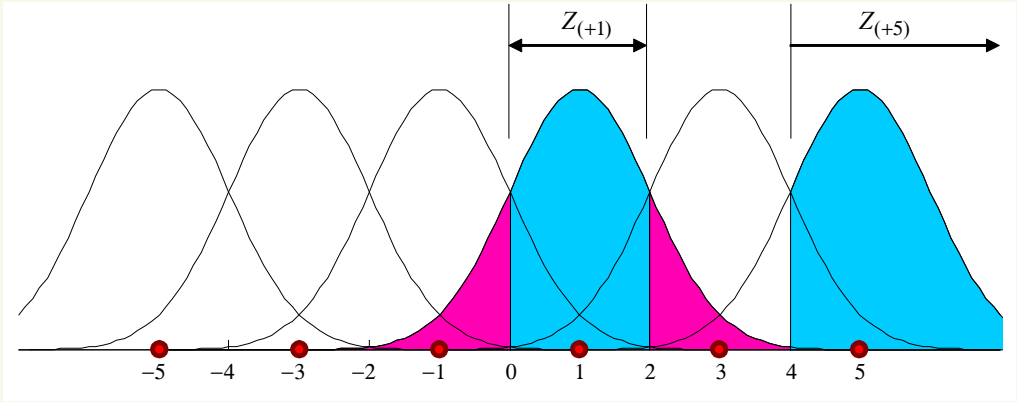
**meilleur que les orthogonaux**

## M-aire Antipodaux (PAM)

### Equiprobables

$$\mathbf{s}_i \in \{\pm A, \pm 3A, \cdots, \pm (M-1)A\}$$

$$D_s = D_b / \log_2 M$$




Exemple avec $\sigma^2 = A = 1$ , $M = 6$ et $E_b / N_0 = 6.5$ dB

$$\Pr\{Ers\} = 1 - \left( \sum_{i=1}^{M} \Pr\{Dc / H_i\} \cdot \frac{1}{M} \right)$$

$M-2$ **cas où :** $\Pr\{Dc\} = \int_{-A}^{+A} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right) \, dz = 1 - 2 \, Q\left(A/\sigma\right)$

**2 cas où :** $\Pr\{Dc\} = \int_{-A}^{+\infty} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right) \, dz = 1 - Q\left(A/\sigma\right)$

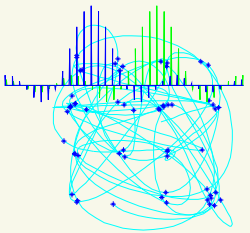
$$\Pr\{Ers\} = 1 - \left( (M-2)\left\{1 - 2Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)\right\} + 2\left\{1 - Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)\right\} \right) \cdot \frac{1}{M}$$

$$\Pr\{Ers\} = 1 - \left( M + (M-1) \;\; 2 \;\; Q\left(\frac{A}{\sigma}\right) \right) \cdot \frac{1}{M} = 2\frac{M-1}{M} Q\left(\frac{A}{\sigma}\right) \qquad \sigma^2 = \frac{N_0}{2} \qquad E_s = \frac{M^2 - 1}{3} \cdot A^2$$

$$\Pr\{Ers\} = 2 \cdot \frac{M-1}{M} \cdot Q\left( \sqrt{\frac{E_b}{N_0} \cdot \frac{6 \log_2 M}{M^2 - 1}} \right)$$

$$E_b = E_s \frac{D_s}{D_b} = \frac{M^2 - 1}{3 \cdot \log_2 M} \cdot A^2$$

# Probabilité d'Erreur par Symbole et aussi par Bit



## *M*-aire Antipodaux (PAM)

**Equiprobables**

**Probabilité d'Erreur sur les symboles**

$$\Pr\{Ers\} = 2 \cdot \frac{M-1}{M} \cdot Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0} \cdot \frac{6\log_2 M}{M^2-1}}\right) = \frac{M-1}{M} \cdot \mathrm{Erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0} \cdot \frac{3\log_2 M}{M^2-1}}\right)$$

**Probabilité d'Erreur sur les bits**

$$\frac{\Pr(Ers)}{\log_2 M} \le \Pr(Erb) \le \Pr(Ers)$$

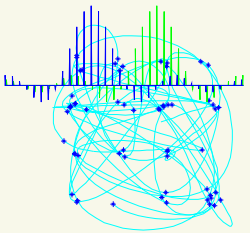
**Avec codage de GRAY** $M = 2^m$ **et** $m = \log_2 M$

**Un seul bit change entre plus proches voisins**

| 111 | 110 | 100 | 101 | 001 | 011 | 010 | 000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| −7 | −5 | −3 | −1 | 1 | 3 | 5 | 7 |

$$\Pr\{Erb\} \approx \frac{M-1}{m \cdot M} \cdot \mathrm{Erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0} \cdot \frac{3\log_2 M}{M^2-1}}\right)$$

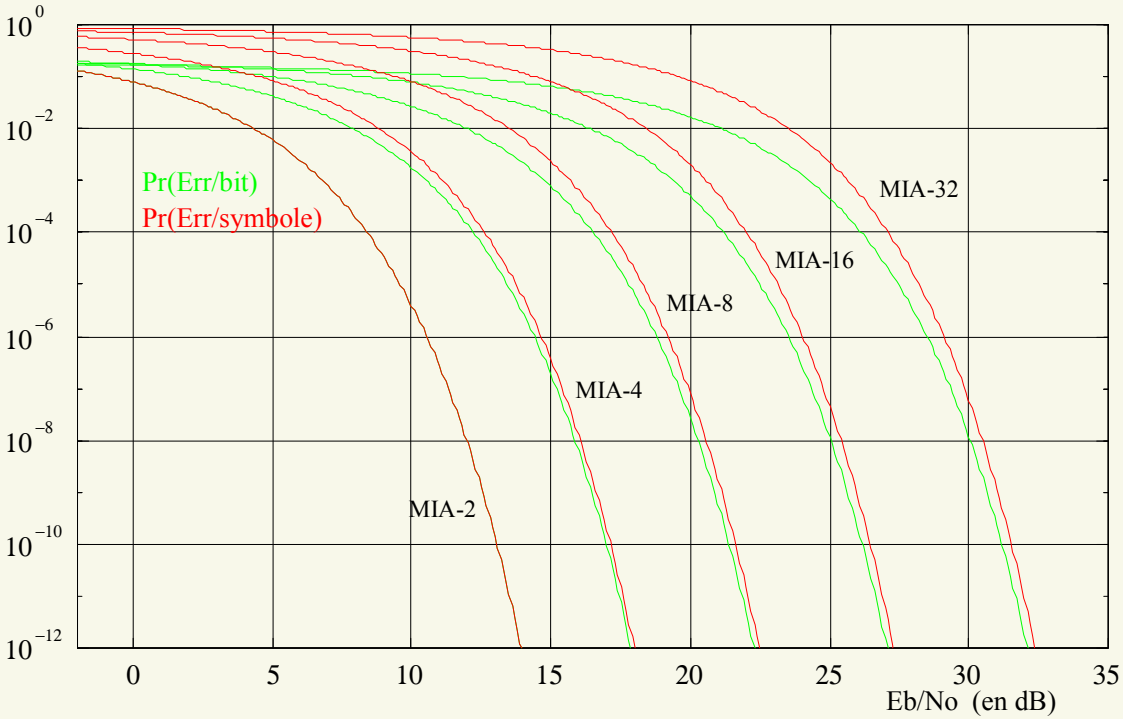
# Probabilité d'Erreur par Symbole MIA-*M* (*M*-PAM)



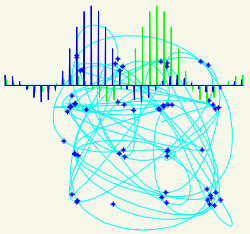
**Suite iid => Taux d'erreur = Pr Erreur Symbole**

$$\Pr\{Ers\} = 2 \cdot \frac{M-1}{M} \cdot Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0} \cdot \frac{6\log_2 M}{M^2-1}}\right)$$

$$\frac{\mathrm{P}(Ers)}{\log_2 M} \le \mathrm{P}(Erb) \le \mathrm{P}(Ers)$$




Courbes de taux d'erreur fonction du rapport Signal à Bruit (Normalisé en Energie par Bit).





# Approximation de la Borne de l 'Union

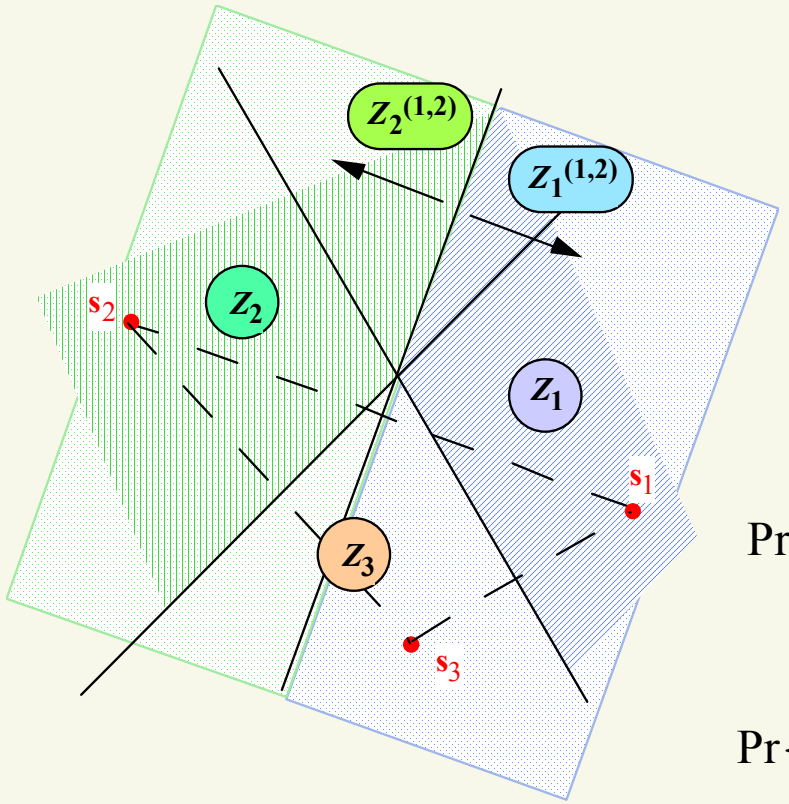
## Pour faire plus simple ?!

# Probabilité d'Erreur par Symbole

## (cas $Z_i$ compliquées)

**Borne de l'Union = majoration grossière mais simple**

**Principe : Se ramener au cas de Détection Binaire**




Deux Zones $Z_i^{(i,j)}$ et $Z_j^{(i,j)}$

$$\Rightarrow \quad \underset{\text{Binaire}}{\Pr\{Ers\}} = Q\left(\sqrt{\frac{d_{ij}^2}{2N_0}}\right)$$

$$\Pr\{Ers\} = \sum_{i=1}^{M} \Pr\{Ers/H_i\} \cdot \Pr\{H_i\} = \sum_{i=1}^{M} \Pr\{\mathbf{z} \notin Z_i/H_i\} \cdot p_i$$

$$\Pr\{\mathbf{z} \notin Z_i/H_i\} = \Pr\left\{\mathbf{z} \in \bigcup_{j \neq i} Z_j/H_i\right\}$$

$$\underbrace{\bigcup_{j \neq i} Z_j}_{\text{disjointes}} = \underbrace{\bigcup_{j \neq i} Z_j^{(i,j)}}_{\text{recouvrantes}}$$

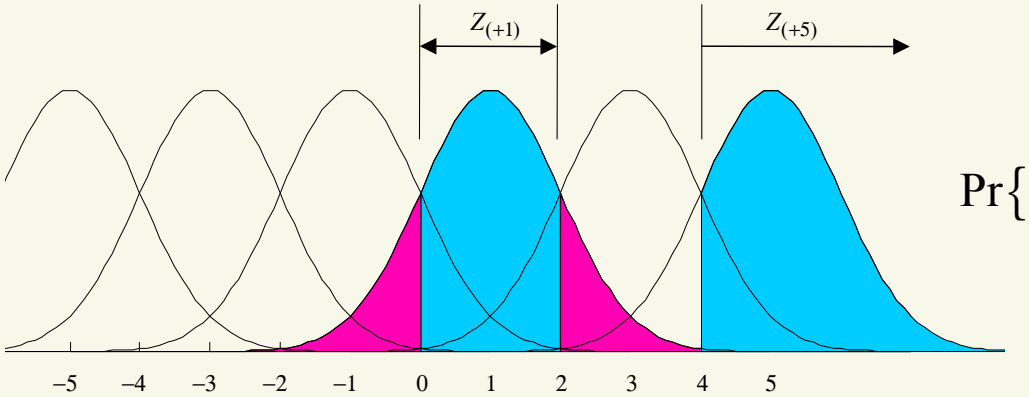
$$\Pr\{Ers/H_i\} = \Pr\left\{\mathbf{z} \in \bigcup_{j \neq i} Z_j^{(i,j)}/H_i\right\} \leq \sum_{j \neq i} \Pr\left\{\mathbf{z} \in Z_j^{(i,j)}/H_i\right\}$$

$$\Pr\{Ers\} \leq \sum_{i=1}^{M} \left( \sum_{j \neq i} Q\left(\sqrt{\frac{d_{ij}^2}{2N_0}}\right)\right) \cdot \Pr\{H_i\}$$

**Termes Prédominants = Voisins Immédiats**

**Probabilité d'Erreur sur les Bits ⇔ Distance de Hamming**

# Borne de l'Union Exemple du PAM




$$\Pr\{Ers/H_i\} \le 2\cdot Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right) \underbrace{+2\cdot Q\left(\sqrt{\frac{4d^2}{2N_0}}\right)+\cdots}_{\text{termes négligeables}}$$

Pour $\mathbf{s}_i$ deux voisins immédiats à la même distance $d_{ij} = d$

**Avec codage de GRAY** : $d_{\text{Hamming}} = 1$ pour les voisins

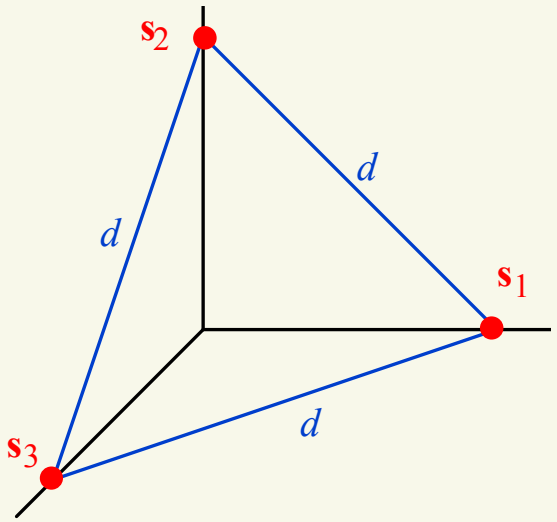
| 100 | 110 | 111 | 101 | 001 | 011 | 010 | 000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| −7 | −5 | −3 | −1 | 1 | 3 | 5 | 7 |

$$\Pr\{Erb/H_i\} \le 2\cdot Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right)\cdot 1 \underbrace{+2\cdot Q\left(\sqrt{\frac{4d^2}{2N_0}}\right)\cdot 2+\cdots}_{\text{termes négligeables}}$$

$$\Pr\{Erb\} \le (M-2)\cdot\left(2Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right)\right)\cdot\frac{1}{M}+2\cdot\left(Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right)\right)\cdot\frac{1}{M}$$

$$\Pr\{Erb\} \le \frac{2\ (M-1)}{M}\cdot Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right)$$

# Borne de l'Union. Exemple signaux *M*-aire Orthogonaux




**Tous à la Même Distance** $d^2$

**Tous Voisins**

$$|\mathbf{s}_i|^2 = E_s$$

$$d_{ij}^2 = |\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j|^2 = 2E_s - \underbrace{2Re\langle \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j \rangle}_{=0}$$

**Codage de GRAY impossible.**

$$\Pr\{\text{chaque bit différent}\} = \frac{M/2}{M-1}$$

Distance de Hamming Moyenne : $d_{\mathrm{H}moy} = \frac{M/2}{M-1} \cdot \log_2 M$

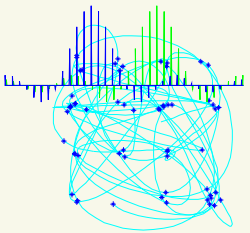
$$\Pr\{Erb/H_i\} \le \sum_{j=1}^{M-1} Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right) \cdot d_{\mathrm{H}moy}$$

$$\Pr\{Erb\} \le \sum_{i=1}^{M} \left( (M-1) \cdot Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right) \cdot d_{\mathrm{H}moy} \right) \cdot \Pr\{H_i\}$$

Si équiprobables $\Pr\{H_i\} = \frac{1}{M}$ et $d^2 = 2E_s = 2E_b \cdot \log_2 M$

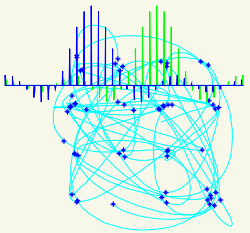
$$\Pr\{Erb\} \le M \frac{M-1}{M} \cdot Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right) \cdot \frac{M/2}{M-1} \cdot \log_2 M$$

$$\Pr\{Erb\} \le \frac{M}{2} \log_2 M \cdot Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0} \cdot \log_2 M}\right)$$



# Probabilité d 'Erreur

**Conclusion :**
**On a quelques formules simples qui permettent de comparer les performances des modulations**



# Probabilité d 'Erreur sur Canal Mobile

## Canal Mobile

paramètres

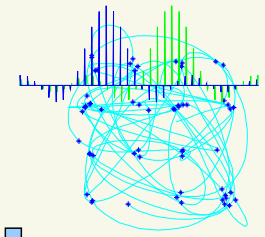
## Canal de Rayleigh

Modèle discret

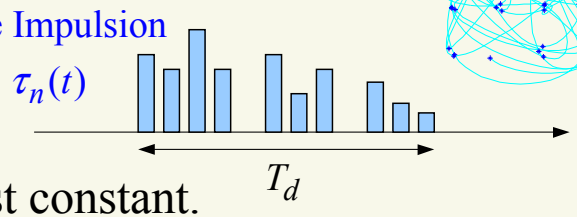
Performances

Diversité

# Canal Mobile = Dispersif, Sélectif en Fréquences $H(f,t)$



## Bande de Cohérence / Temps de Dispersion

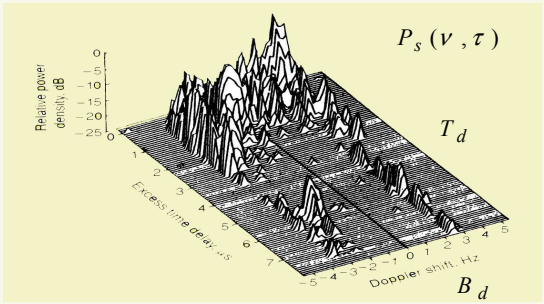



$B_c$ = Largeur de bande sur laquelle on peut considérer que le canal est constant.

$T_d$ = Temps pendant lequel on reçoit les échos (trajets) d'une impulsion.

$T_d \sim 1/B_c$ **Temps de dispersion ~ inverse de la Bande de Cohérence**

## Étalement Doppler / Temps de Cohérence



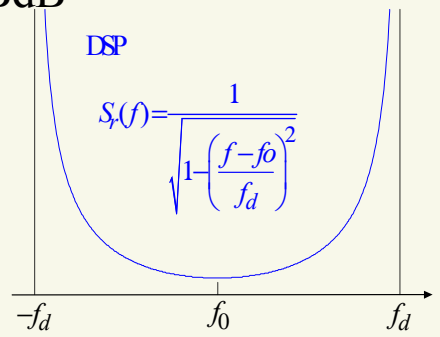

Sinusoïde à un seul trajet

$$\Rightarrow \text{ Reçoit sinusoïde à } f_0 + f_0 \cdot \left(\frac{v}{c}\right) = f_0 + f_d$$

v vitesse relative incidence (ex : 36 km/h=10m/s $f_d = 33\text{Hz}$ pour $f_0 = 1\text{GHz}$)

Sinusoïde à $f_0$, $\phi(t)$ uniforme $\Rightarrow$ Reçoit DSP $S_r(f) = \dfrac{cste}{\sqrt{1-(f/f_d)^2}}$ en BdB

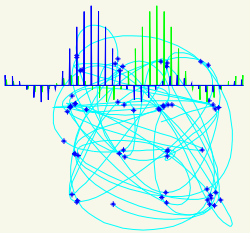
(modèle de Jakes 74)




$T_c \sim 1/f_d$ **Temps de Cohérence ~ inverse du Décalage Doppler**

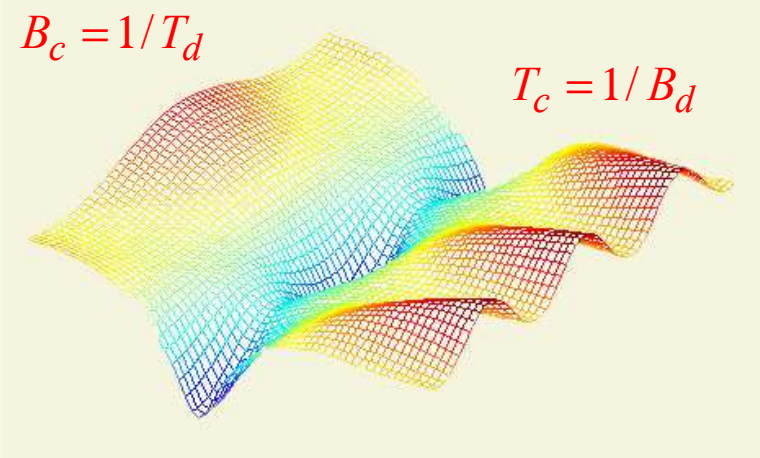
Cohérence (ou maintient) des propriétés statistiques du canal.

# Canal Sélectif en Fréquence $H(t,f)$ Time variant Transfert Function



$$H(t,f) \overset{TF}{\rightleftharpoons} c(t,\tau) = \alpha(\tau,t)\cdot \mathrm{e}^{-j\omega_0\tau}\cdot \mathrm{u}(\tau)$$

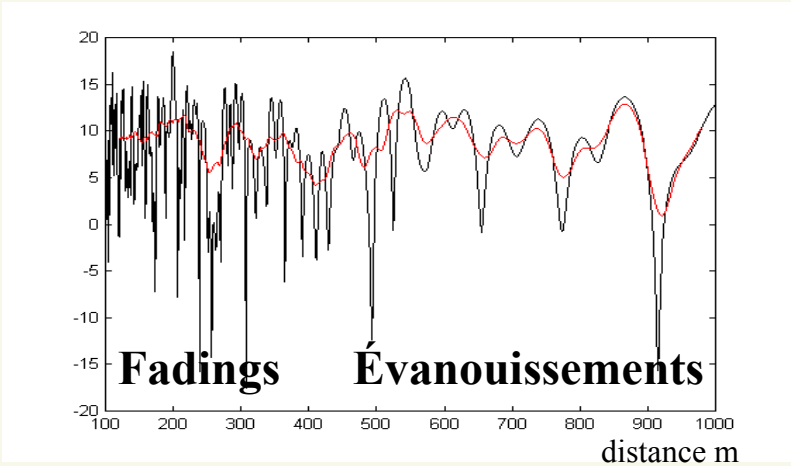
**Change tout le temps**
**⇒ Egaliseurs Adaptatif**

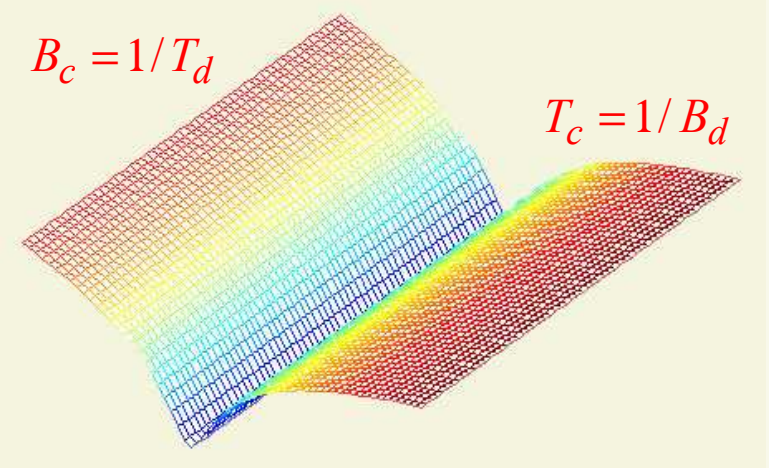



## Modèle Bande Étroite (Rayleigh)

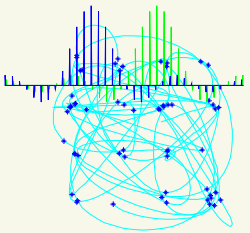
## Canal Non Sélectif en Fréquence (Flat-Fading) $H(t,f) = H(t,f_0)$

$$H(t,f_0) \overset{TF}{\rightleftharpoons} c(t)\cdot\delta(\tau)$$

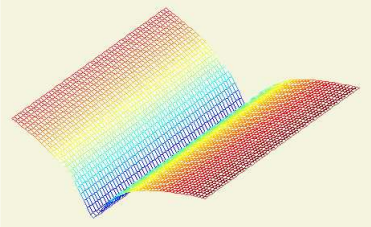


# Canal non Dispersif, non Sélectif (Flat-Fading)



**Toutes les fréquences sont affaiblies de la même façon.** $H(t,f) = H(t,f_0)$



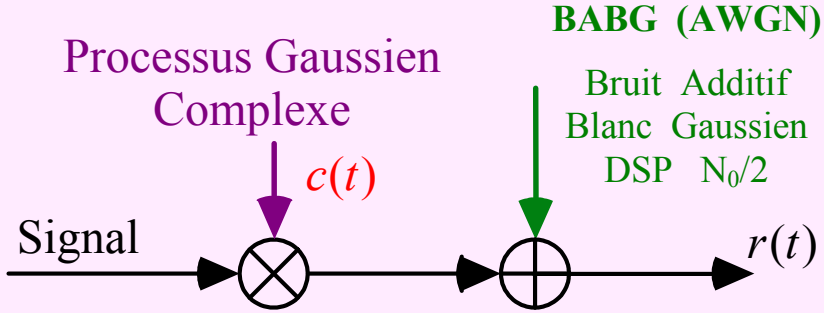
$B_c$ **Bande de Cohérence du canal > Largeur de bande du signal**

$$H(t,f_0) \overset{TF}{=} c(t)\cdot\delta(\tau)$$

Canal de Rice = Rayleigh + 1 trajet dominant (souvent le trajet direct)

**Canal de Rayleigh = multitude de trajets indépendants, pas de trajet prédominant.**

Amplitude du signal varie au cours du temps (fading) $r(t) = \underbrace{\alpha(t)e^{j\phi(t)}}_{c(t)}\cdot s(t) + n(t)$



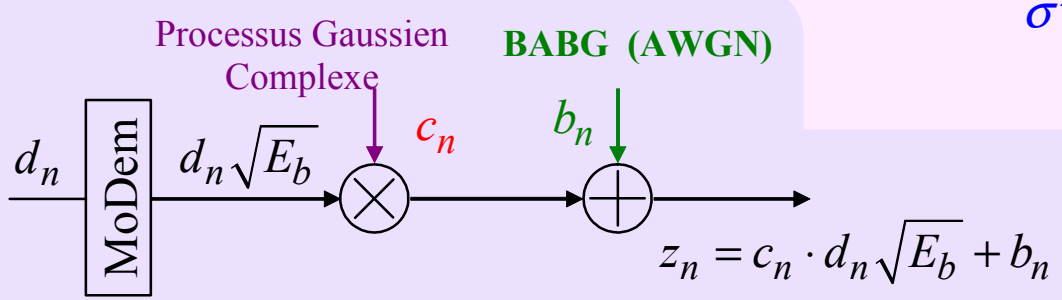

$c(t)$ gaussien complexe

$\phi(t)$ suit une loi uniforme

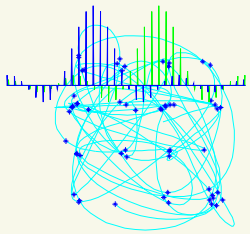
$a(t)$ suit une **loi de Rayleigh**

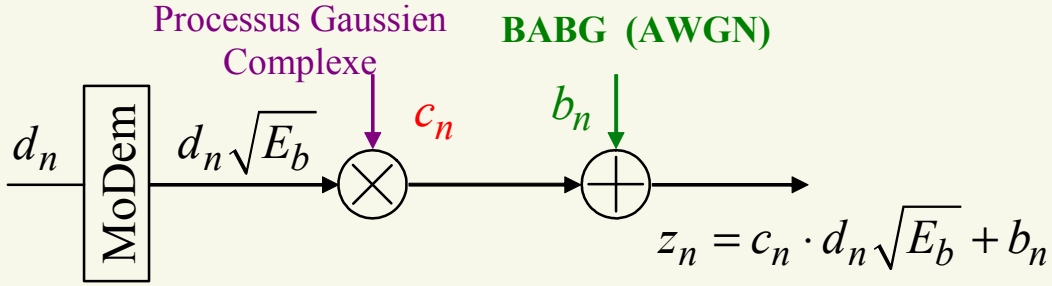
$$p_\alpha(x) = \frac{x}{\sigma^2}\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\cdot u(x)$$

**Modèle discret** (temps $n$)



# Canal de Rayleigh — Performance en MDP2






$c_n = \alpha_n \, e^{j\phi_n}$

gaussien complexe (variance $2\sigma^2$)

**Énergie par bit émise** $E_b = P_e / D_b$ **Énergie par bit reçue** $E_{b,n} = |c_n|^2 \cdot E_b = \rho_n^2 \cdot E_b$

**Bruit reçu Gaussien complexe :** $b_n = b_{pn} + j \cdot b_{qn}$ **variance** $\sigma_b^2 = N_0$ $\left(\frac{N_0}{2} + \frac{N_0}{2}\right)$

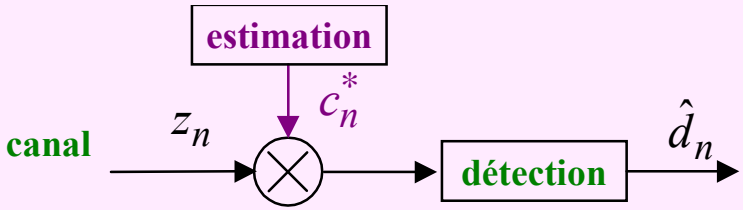
**Rapport signal à bruit Instantané :** $\gamma_n = \frac{E_{b,n}}{\sigma_b^2} = \frac{|c_n|^2 E_b}{N_0} = \alpha_n^2 \cdot \frac{E_b}{N_0}$ .

## Récepteur optimal BABG projette sur le Signal Reçu sans bruit soit $c_n$

**Le récepteur Estime** $c_n = \alpha_n \, e^{j\phi_n}$

**Puis Projette** (filtre Adapté)

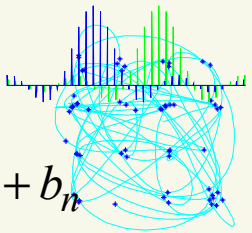
$$\Rightarrow \quad r_n = z_n \cdot c_n^* = |c_n|^2 \cdot d_n \cdot \sqrt{E_b} + b_n$$




**Puis Détecte l'amplitude de la MDP2** (Idem MAQ, MIA-*M*)

Si les gains $c_n = \alpha_n \, e^{j\phi_n}$ restent identiques $\forall n$ $\Rightarrow$ $\Pr\{Ers / c_n\} \le \frac{2(M-1)}{M} \cdot Q\left(\sqrt{\frac{d_n^2}{2N_0}}\right)$

# Canal de Rayleigh — Calcul de la Probabilité d'Erreur



$s(t) = \sum_k d_k g(t - kT_s)$ **MIA-2 MDP-2** $d_k \in \{\pm 1\}$ $r_n = c_n \cdot s_n + b_n = c_n \cdot d_n \sqrt{E_s} + b_n$

$$\Pr\{Ers / c_n\} = Q\left(\sqrt{\frac{d_n^2}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{2\alpha_n^2 \frac{E_b}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{2\gamma_n}\right)$$

$c_n = \alpha_n \, e^{j\phi_n}$ gaussien complexe (variance $\sigma^2$)

$\phi_n$ **loi uniforme** $\alpha_n$ **loi de Rayleigh** $p_\alpha(x) = \frac{x}{\sigma^2} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \cdot u(x)$

**S/B Instantané :** $\gamma_n = \frac{E_{b,n}}{\sigma_b^2} = \frac{\alpha_n^2 E_b}{N_0}$ **loi exponentielle** $p_{\gamma_n}(x) = \frac{1}{\gamma} \cdot \exp\left(-\frac{x}{\gamma}\right) \cdot u(x)$

**S/B Moyen :** $E\{\gamma_n\} = 2\sigma^2 \cdot \frac{E_b}{N_0} \triangleq \gamma$

**Canal à variations lentes** $T_s \ll T_c \sim 1/B_d \Rightarrow$ Gains $c_n = \alpha_n \, e^{j\phi_n}$ varient lentement pr $T_s$

**Moyenne sur les variations**

$$\Pr\{Ers\} = \int \Pr\{Ers / \alpha_n = x\} \, p_{\alpha_n}(x) dx$$

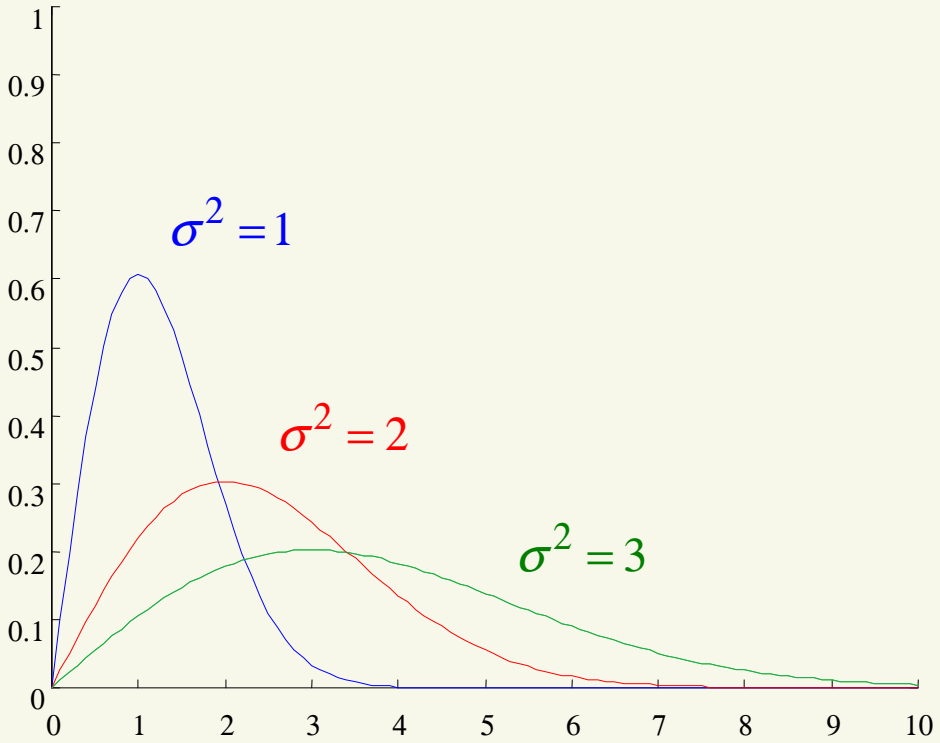
$$\Pr\{Ers\} = \int \Pr\{Ers / \gamma_n = x\} \, p_{\gamma_n}(x) dx$$

$c_n = \alpha_n \, e^{j\phi_n}$ gaussien complexe (variance $\sigma^2$)

$\phi_n$ **loi uniforme**

$\alpha_n$ **loi de Rayleigh**

$$p_\alpha(x) = \frac{x}{\sigma^2} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \cdot u(x)$$

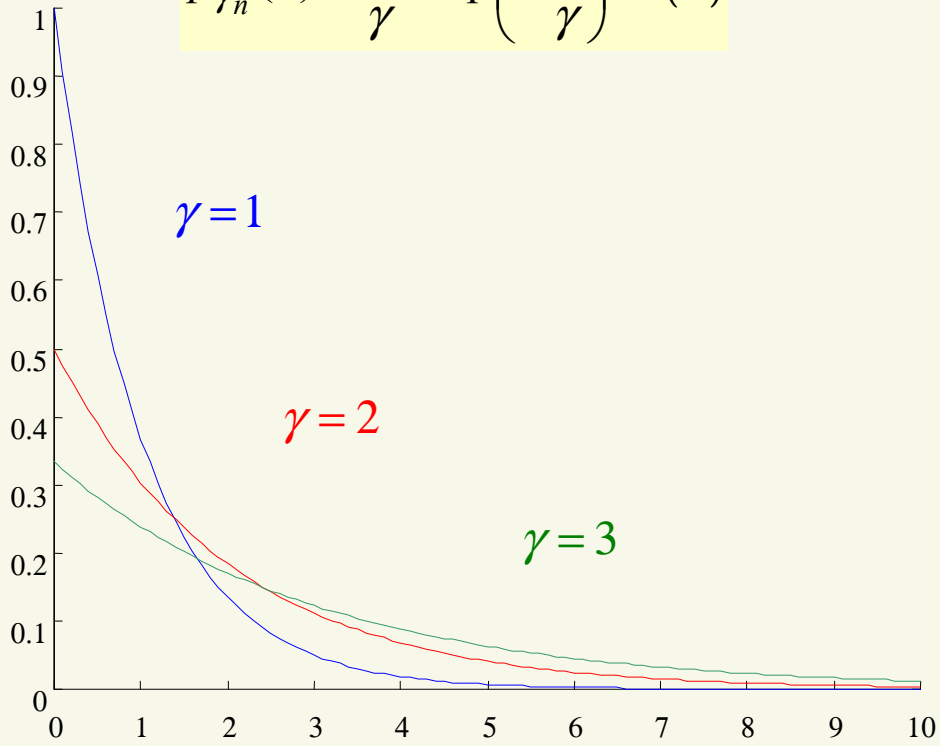



**S/B Instantané :** $\gamma_n = \frac{E_{b,n}}{\sigma_b^2} = \frac{\alpha_n^2 E_b}{N_0}$

**S/B Moyen :** $E\{\gamma_n\} = 2\sigma^2 \cdot \frac{E_b}{N_0} \triangleq \gamma$

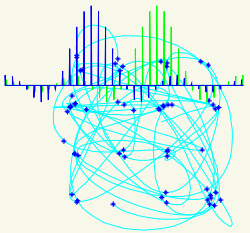
**loi exponentielle**

$$p_{\gamma_n}(x) = \frac{1}{\gamma} \cdot \exp\left(-\frac{x}{\gamma}\right) \cdot u(x)$$



# Canal de Rayleigh

## Calcul de la Probabilité d'Erreur



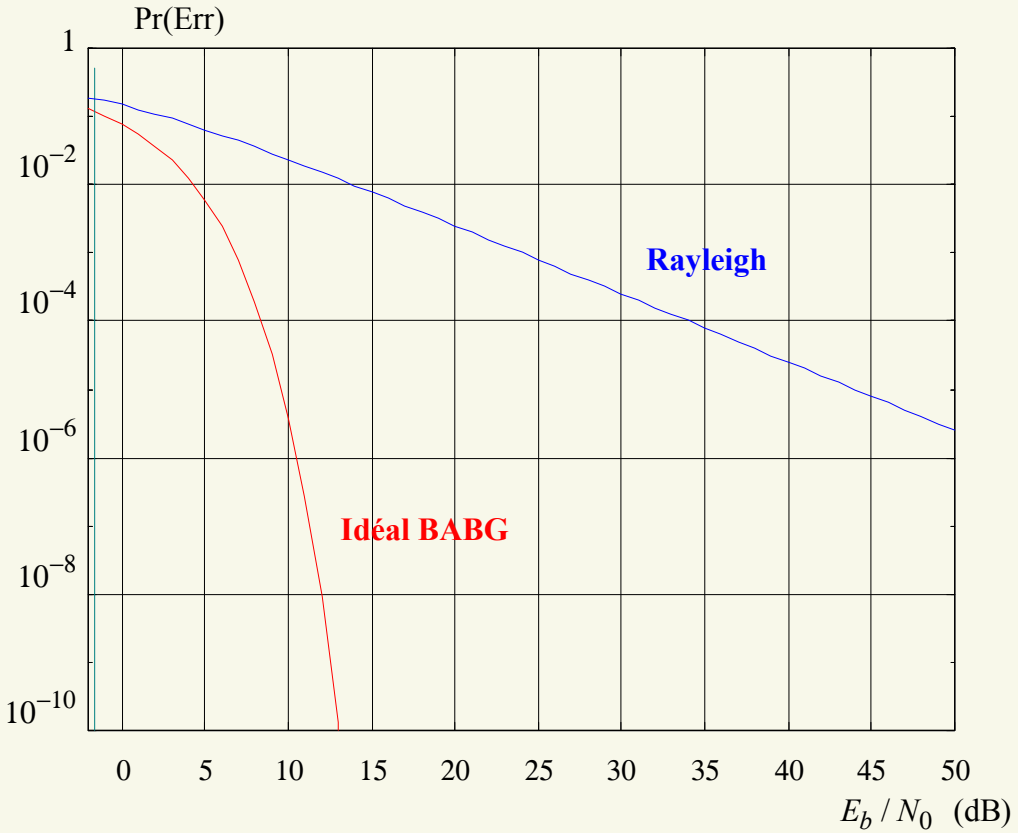
**Moyenne sur les variations**

$$\Pr\{Ers\} = \int \Pr\{Ers / \gamma_n = x\}\, p_{\gamma_n}(x)dx$$

$$\Pr\{Ers\} = \int_0^{+\infty} Q\left(\sqrt{2x}\right) \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \exp\left(-\frac{x}{\gamma}\right) \cdot dx$$

$$\gamma \triangleq 2\sigma^2 \cdot \frac{E_b}{N_0}$$

$$\Pr\{Ers\} = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{\gamma}{1+\gamma}}\right) \xrightarrow{\gamma \to \infty} \frac{1}{4\gamma}$$




**Particularités**

**Estimation impérative des gains $c_n$**

**Performances très mauvaises par rapport au canal Constant**

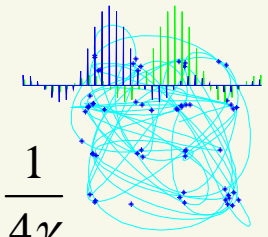
**Mobiles ⇒ Signaux peu puissants**
**$E_b/N_0$ faible**

$\Pr\{Ers\} \approx 10^{-2}$ maxi

⇒ **Diversité**

# Canal de Rayleigh

## Probabilité d'Erreur



Modulations Binaires Simples

**2-PSK cohérente**

$$\Pr\{Ers\} = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{\gamma}{1+\gamma}}\right) \xrightarrow{\gamma\to\infty} \frac{1}{4\gamma}$$

**2-FSK cohérente**

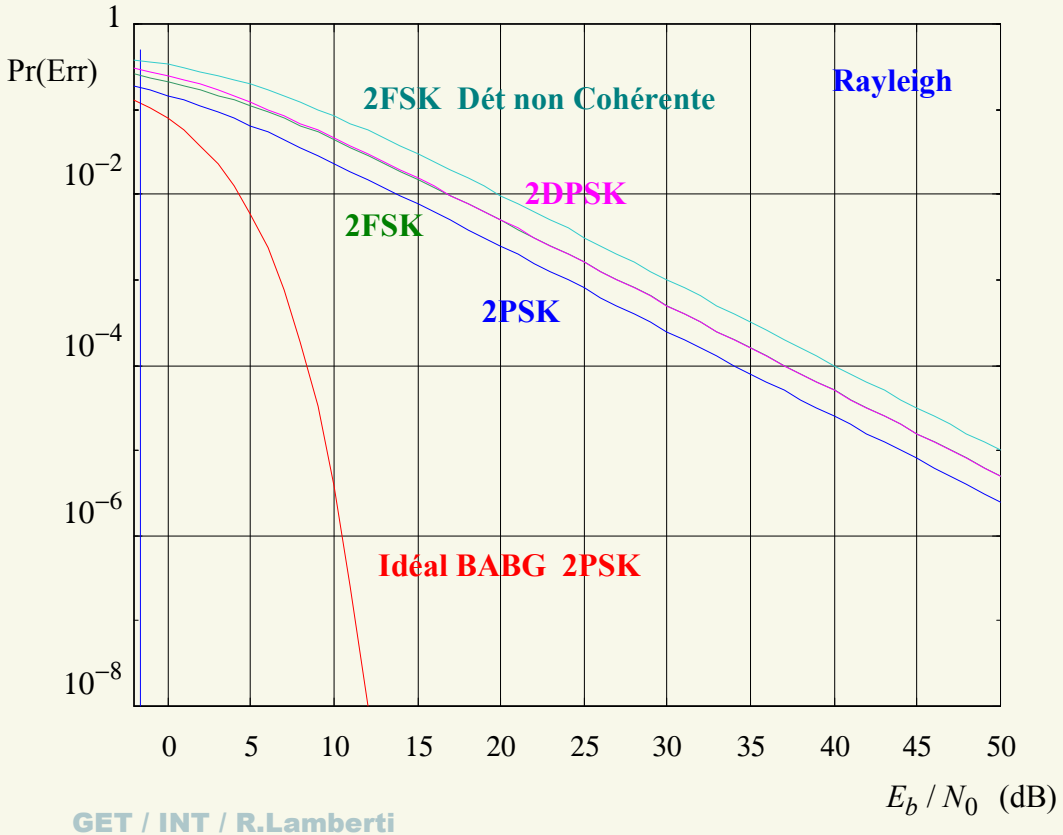
$$\Pr\{Ers\} = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{\gamma}{2+\gamma}}\right) \xrightarrow{\gamma\to\infty} \frac{1}{2\gamma}$$

**2-DPSK**

$$\Pr\{Ers\} = \frac{1}{2(1+\gamma)} \xrightarrow{\gamma\to\infty} \frac{1}{2\gamma}$$

**2-FSK non cohérente**

$$\Pr\{Ers\} = \frac{1}{2+\gamma} \xrightarrow{\gamma\to\infty} \frac{1}{\gamma}$$

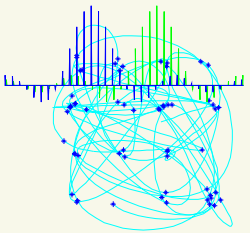



**La détection différentielle ou non cohérente évite l'estimation des phases**

**Modulations à nombre d'états plus élevés sont possibles mais moins performantes**

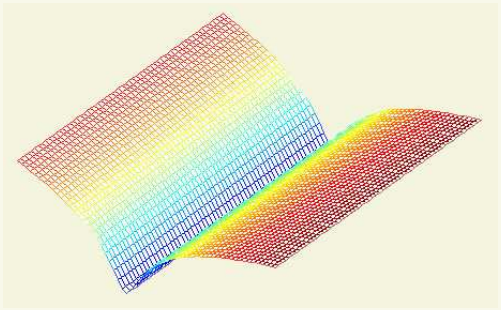
$\Pr\{Ers\} \approx 10^{-2}$ ⇒ **Diversité**

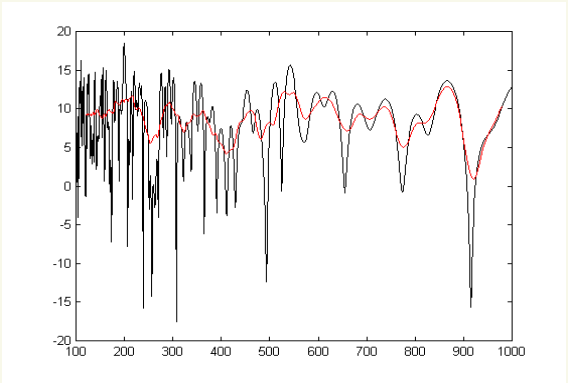
# Canal à trajets multiples  Diversité



**Principe : Transmettre plusieurs fois la même information sur des canaux différents (indépendants).**

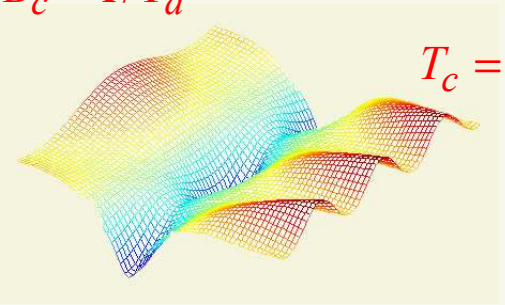
**Utilisée pour palier les évanouissements (canal à fading lent GSM)**






$B_c = 1/T_d$

$T_c = 1/B_d$



Ex : 100kbit/S = 10µs

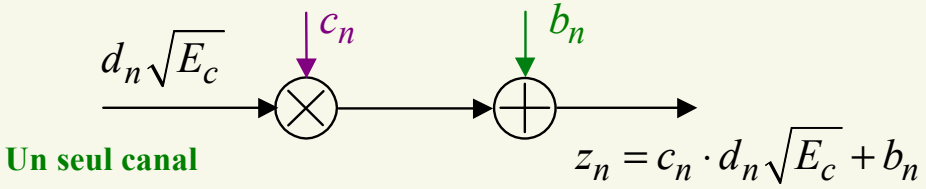
1m ~ affaiblissement profond, à 10m/s (36 km/h) ⇒ 10 000 bits erronés. (10% du temps)

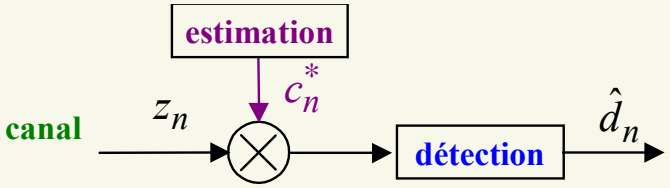
**Entrelaceur répartit les erreurs ⇒ Mauvaises performances globales**

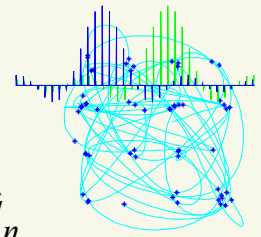
## Techniques :

- **Diversité de Temps** (coefficients $c_n$ indépendants espacés de plusieurs $T_c$ )
- **Diversité de Fréquence** (canaux indépendants si espacés de plusieurs $B_c$ )
- **Diversité d'Espace** (plusieurs antennes écartées de plusieurs $\lambda_0$ )
- **Diversité de direction (plusieurs faisceaux d'antenne)**
- **Diversité de polarisation**

# Canal à trajets multiples — Diversité



## Plusieurs fois la même information sur des canaux indépendants

**Récepteur optimal cohérent (max S/B) ⇔ Maximal Ratio Combiner (MRC Brennan 59)**

**Signal reçu**

$$\mathbf{z}_n^T = \left[ z_{n,1} \cdots z_{n,l} \cdots z_{n,L} \right]$$

$$\mathbf{z}_n = d_n\sqrt{E_c} \cdot \mathbf{c}_n + \mathbf{b}_n$$

$$\mathbf{c}_n^T = \left[ c_{n,1} \cdots c_{n,l} \cdots c_{n,L} \right]$$

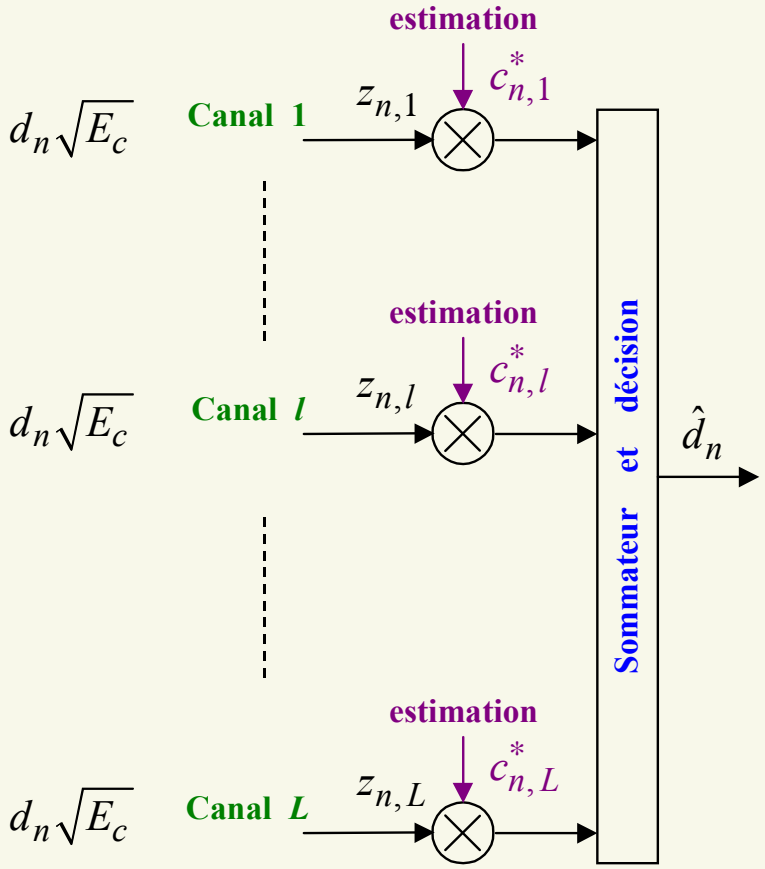
**Récepteur optimal min Erreurs**

$$\hat{d}_n = \alpha_i \quad \text{tel que} \quad \min_i \left| \mathbf{z}_n - \alpha_i\sqrt{E_c}\mathbf{c}_n \right|^2$$

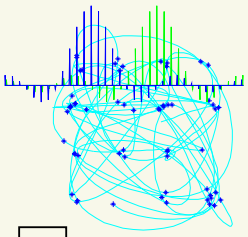
$$\text{soit} \quad \max_i \left\{ \alpha_i |\mathbf{c}_n|^2 \sqrt{E_c} - 2\,\mathrm{Re}\left( \mathbf{c}_n^H \cdot \mathbf{z}_n \right) \right\}$$

soit estimation des gains puis
projection, partie réelle et comparateur à seuils

ou **détection du signe en binaire** $d_n \in \{\pm 1\}$



# Canal de Rayleigh  Diversité d'ordre *L*



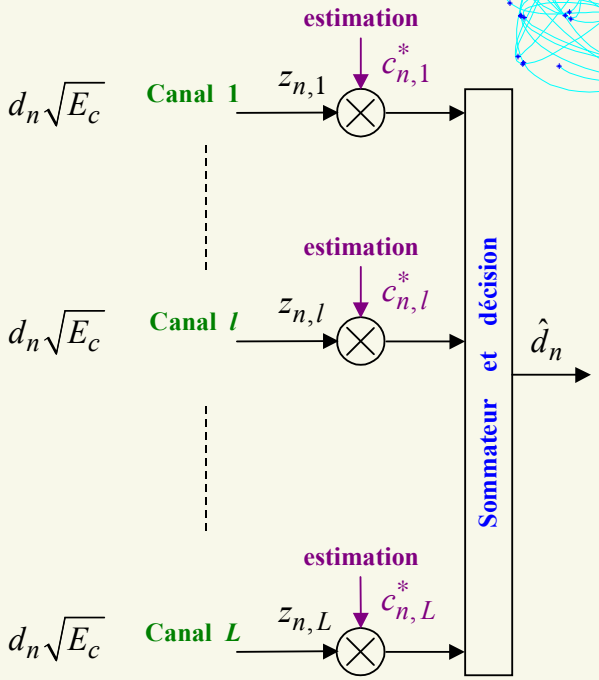
**Ex MDP2** $d_n \in \{\pm 1\}$  $\mathbf{z}_n = d_n \sqrt{E_c} \cdot \mathbf{c}_n + \mathbf{b}_n$

Distance entre les signaux reçus sans bruit $d^2 = 4E_c |\mathbf{c}_n|^2$

Probabilité d'erreur canaux fixés :

$$\Pr\{Ers / \mathbf{c}_n\} = Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{2|\mathbf{c}_n|^2 \frac{E_c}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{2\gamma_n}\right)$$

Proba d'erreur moyenne : $\Pr\{Ers\} = \int \Pr\{Ers / \gamma_n = x\}\, p_{\gamma_n}(x)dx$




Rapport S/B $\gamma_n = |\mathbf{c}_n|^2 \frac{E_c}{N_0} = \sum_{l=1}^{L} |c_{n,l}|^2 \frac{E_c}{N_0} = \sum_{l=1}^{L} \gamma_{n,l}$

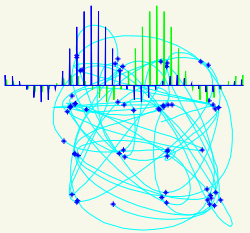
Comparaison au cas sans diversité à même puissance émise : $\gamma_n = \gamma_{n,l} \cdot \frac{E_b}{E_c} = \gamma_{n,l} \cdot L$ .

**Loi du S/B** : $\gamma_n = \sum_{l=1}^{L} \gamma_{n,l}$ = somme de variables indépendantes de même lois exponentielles,

de moyenne $\gamma = 2\sigma^2 \cdot \frac{E_c}{N_0}$.

$$p_{\gamma_n}(x) = p_{\gamma_{n,1}} * p_{\gamma_{n,2}} * \cdots * p_{\gamma_{n,L}} = \frac{x^{L-1}}{(L-1)!\,\gamma^L} \cdot \exp\left(-\frac{x}{\gamma}\right) \cdot \mathrm{u}(x)$$

# Canal de Rayleigh — Probabilité d'erreur en Diversité d'orde *L*



Probabilité d'erreur moyenne : $\Pr\{Ers\} = \int \Pr\{Ers / \gamma_n = x\}\, p_{\gamma_n}(x)dx$

$$p_{\gamma_n}(x) = \frac{x^{L-1}}{(L-1)!\,\gamma^L} \cdot \exp\left(-\frac{x}{\gamma}\right) \cdot u(x)$$

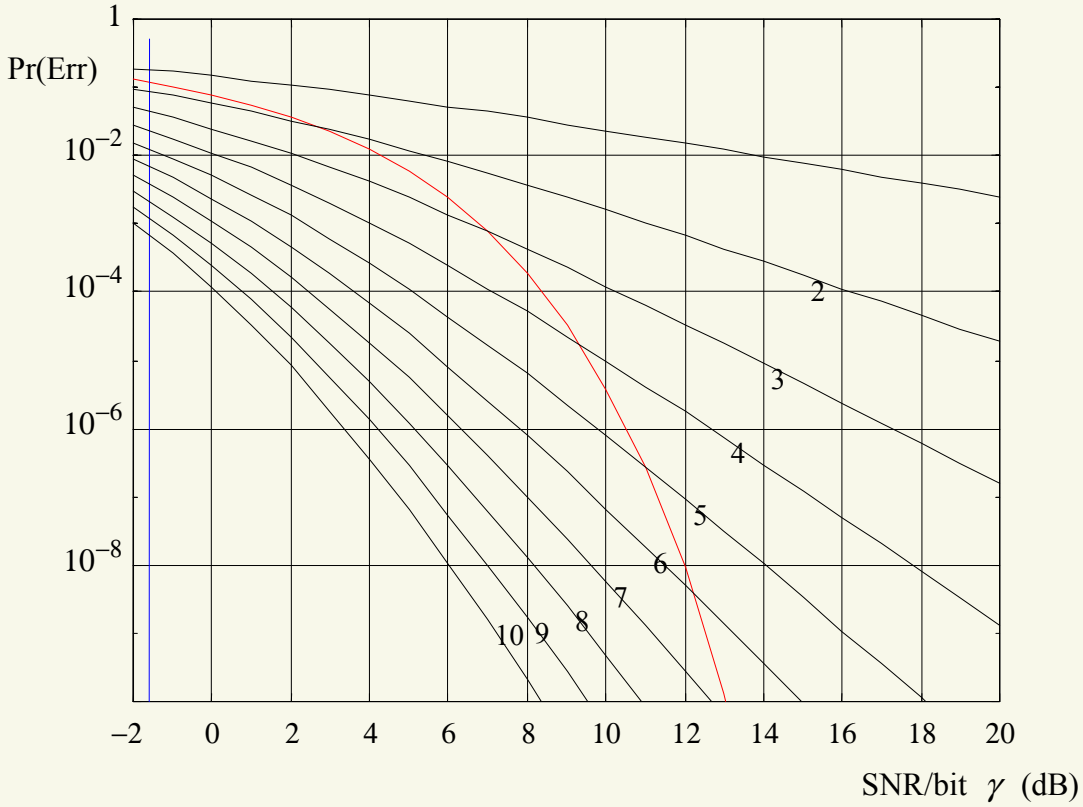
$$\Pr_{\text{MDP2}}\{Ers\} = \int_0^{+\infty} Q\left(\sqrt{2x}\right) \cdot \frac{x^{L-1}}{(L-1)!\,\gamma^L} \cdot \exp\left(-\frac{x}{\gamma}\right) dx$$

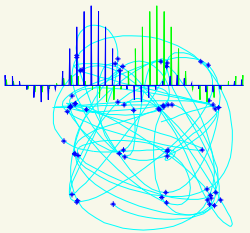
$$\Pr_{\text{MDP2}}\{Ers\} = \left(\frac{1-\mu}{2}\right)^L \cdot \sum_{l=0}^{L-1} C_{L-1+l}^{l} \cdot \left(\frac{1+\mu}{2}\right)^l$$

avec $\mu = \sqrt{\dfrac{\gamma}{1+\gamma}}$

**Limite**

$$\Pr_{\text{MDP2}}\{Ers\} \xrightarrow[\gamma>10\text{dB}]{} C_L^{2L-1} \cdot \left(\frac{1}{4\gamma}\right)^L$$





**4. Récepteur Optimal canal BABG stationnaire.**

1 Détection au minimum de la probabilité d'erreur.
2 Zones et seuils de décisions.
3 Réalisation du récepteur. Filtre adapté.
4 Interférence Entre Symboles(IES). Critère de Nyquist.

**5. Calcul de performance.**

1 Taux d'Erreur cas de signaux binaire antipodaux, orthogonaux.
2 Cas M-aire. Borne de l'Union.
3 Canal Mobile et Performances en Diversité.

**6. Modulations Numériques sur Fréquence Porteuse.**

1 Modulations Linéaires. Modulations de Fréquence.
2 Comparaison des modulations. Efficacité / performance.
3 OFDM. Etalement de spectre. Multiplexage