

4. Récepteur Optimal canal BABG stationnaire.

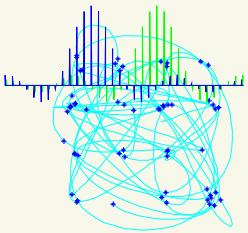
1 Détection au minimum de la probabilité d'erreur.
2 Zones et seuils de décisions.
3 Réalisation du récepteur. Filtre adapté.
4 Interférence Entre Symboles(IES). Critère de Nyquist.

5. Calcul de performance.

1 Taux d'Erreur cas de signaux binaire antipodaux, orthogonaux.
2 Cas M-aire. Borne de l'Union.
3 Canal Mobile et Performances en Diversité.

6. Modulations Numériques sur Fréquence Porteuse.

1 Modulations Linéaires. Modulations de Fréquence.
2 Comparaison des modulations. Efficacité / performance.
3 OFDM. Etalement de spectre. Multiplexage



Modulations.

En Bande de Base : Modulation

- d'Impulsion en Amplitude (MIA) (PAM, ASK); en Position (PPM)

Sur Fréquence Porteuse : Modulation de

- Deux Porteuses en Quadrature (MAQ) (QAM), Plusieurs Porteuses (OFDM)
- Phase Numérique (MDP) (PSK) (OQPSK)
- Fréquence Numérique (MDF) (FSK) (MSK GMSK)

Étalement de Spectre.

- Par Saut Porteuses (FHSS), Orthogonales (COFDM)
- Par Mots de Code (DSSS), Par Saut de Position (THSS)

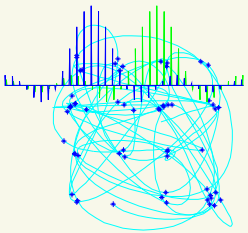
Multiplexage. (Orthogonalité entre les utilisateurs)

- En Fréquence (FDMA) Par Mots de Code (CDMA)
- Par Décalage Temporel (TDMA)

Duplexage.

- HD
- FD : TDD FDD CDD

Modulations Numériques sur Fréquence Porteuse



Intérêt : Déplacer la DSP pour s'adapter au canal

Fréquence porteuse ↑ ⇒ Largeur de Bande ↑

Modulations Analogiques

Amplitude	**MA (AM)**	$s(t) = (1 + A \cdot m(t)) \cdot \cos \omega_0 t$
Fréquence Phase	**MF MDF (FM)**	$s(t) = A \cdot \cos\left(\omega_0 t + k \cdot \int_{-\infty}^{t} m(u)du\right)$
	MDP (PM)	$s(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + k \cdot m(t))$

Modulations Numériques (Info Numérique, Signal Analogique)

Modulations Linéaires :

Modulations d'Amplitude MIA-*M* (*M*-PAM ou *M*-ASK)

Modulation d'Amplitude de Deux Porteuses en Quadrature MAQ-*M* (*M*-QAM)

Modulation par Déplacement de Phase MDP-*M* (*M*-PSK)

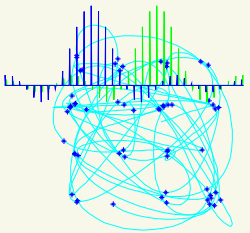
Modulation Linéaires Décalées π/4 QPSK OQPSK et MSK

Modulations non Linéaires :

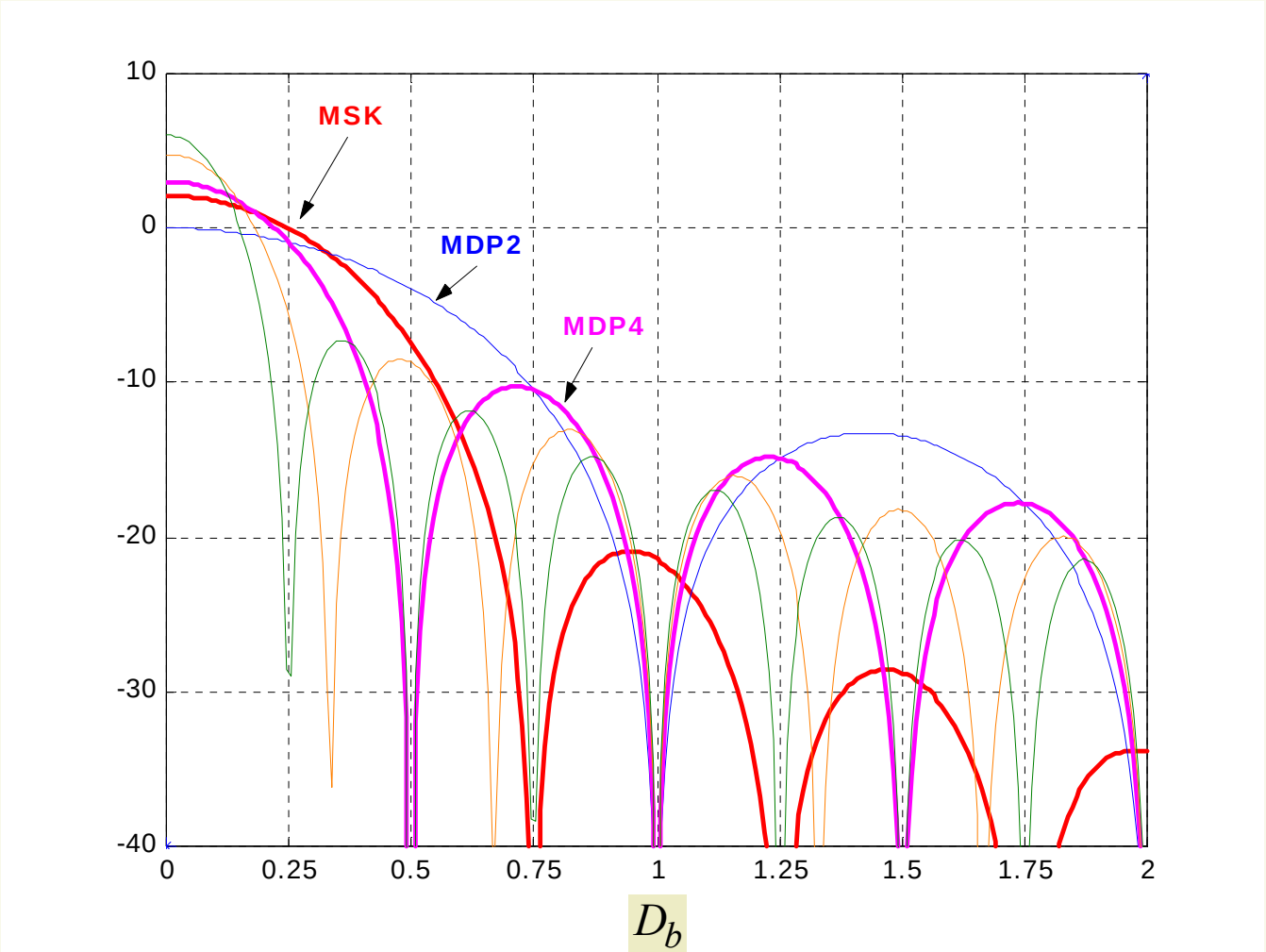
MDF Numérique (ou FSK) CPM CPFSK GMSK

DSP des Modulations Numériques Linéaires

MIA-*M* MAQ-*M* MDP-*M* (*M*-PAM *M*-QAM *M*-PSK)



Non Filtrées, forme NRZ. $S_{\alpha_s}(f) = Cste \cdot \mathrm{Sinc}^2(\pi f T_s)$

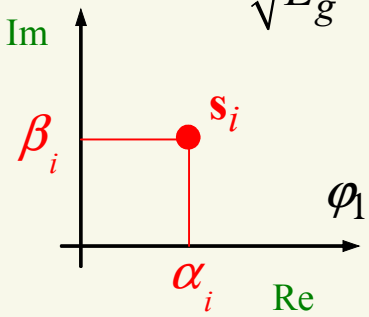


Modulations Numériques Linéaires (sur fréquence porteuse)

Signal Passe Bande réel. Enveloppe complexe. Représentation Vectorielle.

$$s(t) = \sum_k d_{pk} \cdot g(t - kT_s) \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\omega_0 t) - \sum_k d_{qk} \cdot g(t - kT_s) \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega_0 t)$$

$$\varphi_2(t) = \frac{g(t)}{\sqrt{E_g}} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin \omega_0 t$$



$$\varphi_1(t) = \frac{g(t)}{\sqrt{E_g}} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos \omega_0 t$$

$$\alpha_s(t) = \sum_k \left(d_{pk} + j d_{qk} \right) \cdot g(t - kT_s)$$

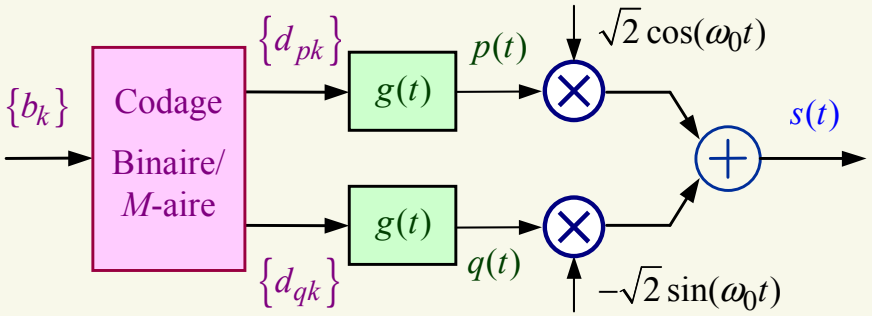
$$\mathbf{s}_i = \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix}$$

Filtres adaptés

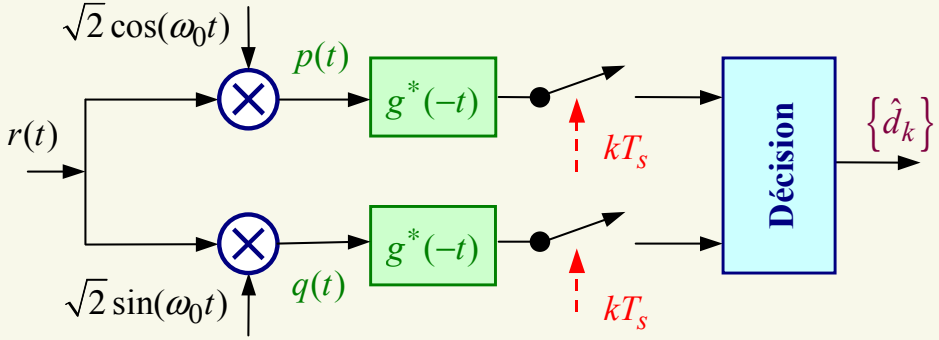
$g(-t) \cdot \sin(\omega_0 t)$

& $g(-t) \cdot \cos(\omega_0 t)$

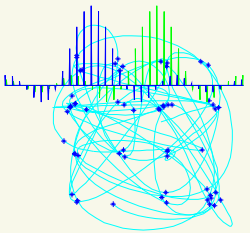
Modulateur d'Émission



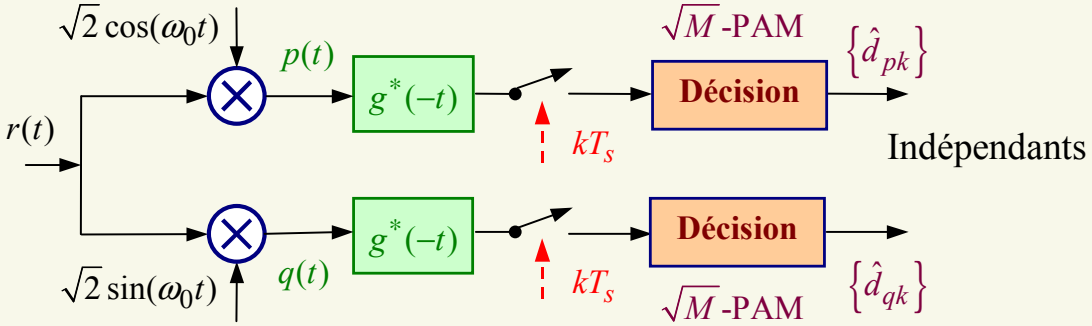
Récepteur Optimal Cohérent BABG

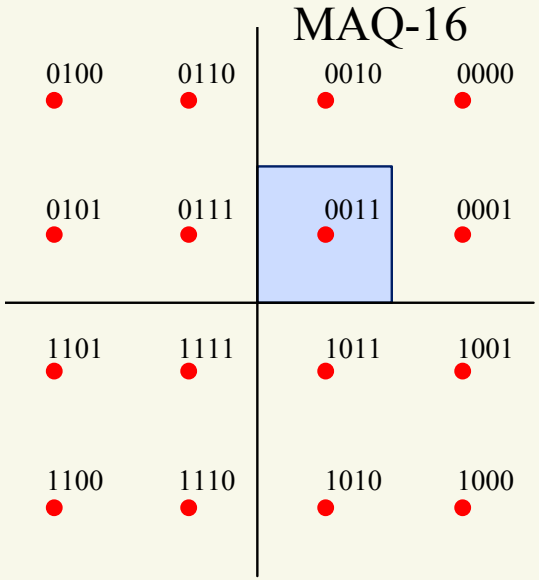


Modulation de Deux Porteuses en Quadrature *M*-QAM



Cas $M = 2^N$ N Pair$\Rightarrow$ MAQ-4, 16, 64, 256, ...





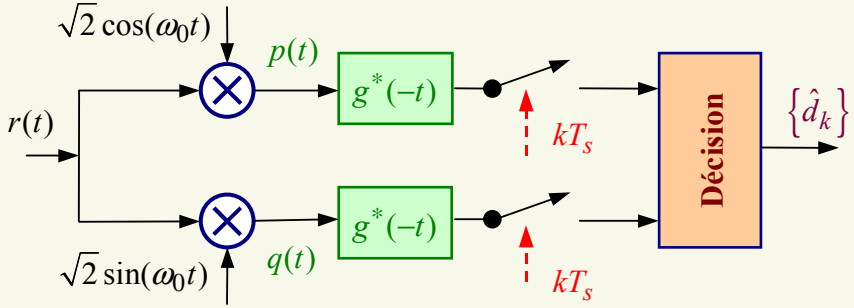
$$\Pr_{\text{M-QAM}}\{Ers\} = 1 - \left(\Pr_{\sqrt{M}\text{-PAM}}\{Dc\}\right)^2 = 1 - \left(1 - \Pr_{\sqrt{M}\text{-PAM}}\{Ers\}\right)^2$$

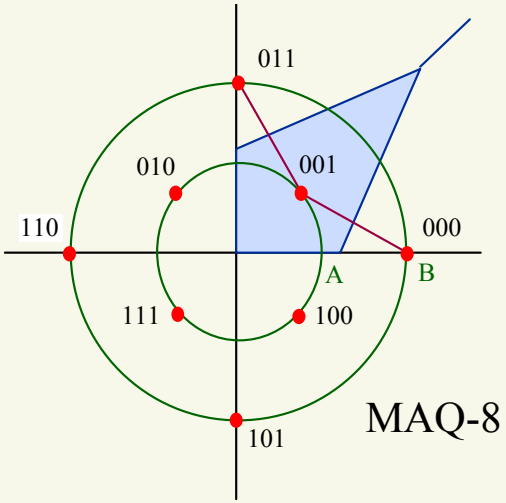
$$\Pr_{\text{M-QAM}}\{Ers\} = 2\Pr_{\sqrt{M}\text{-PAM}}\{Ers\} - \left(\Pr_{\sqrt{M}\text{-PAM}}\{Ers\}\right)^2 \approx 2\Pr_{\sqrt{M}\text{-PAM}}\{Ers\}$$

$$\Pr_{M\text{-QAM}}\{Ers\} \approx 4 \cdot \frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}} \cdot Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0} \cdot \frac{6\log_2 \sqrt{M}}{M-1}}\right)$$

Modulation de Deux Porteuses en Quadrature MAQ-*M* (*M*-QAM)

Cas $M = 2^N$ N Impair $\Rightarrow$ MAQ-8, 32, 128, ...





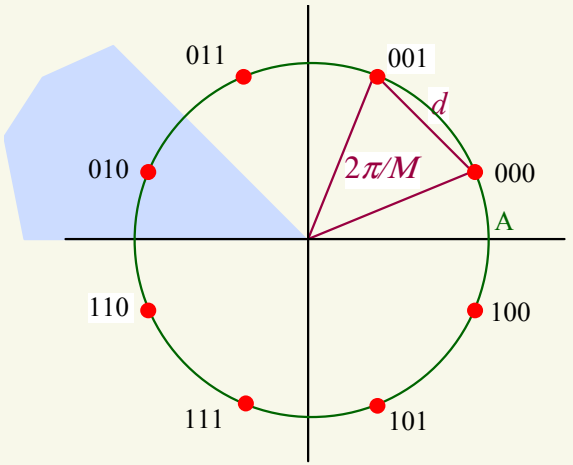
Modulation par Déplacement de Phase MDP-*M* (*M*-PSK)

Même récepteur.

Borne union. Ici Chaque Point à Deux Voisins.

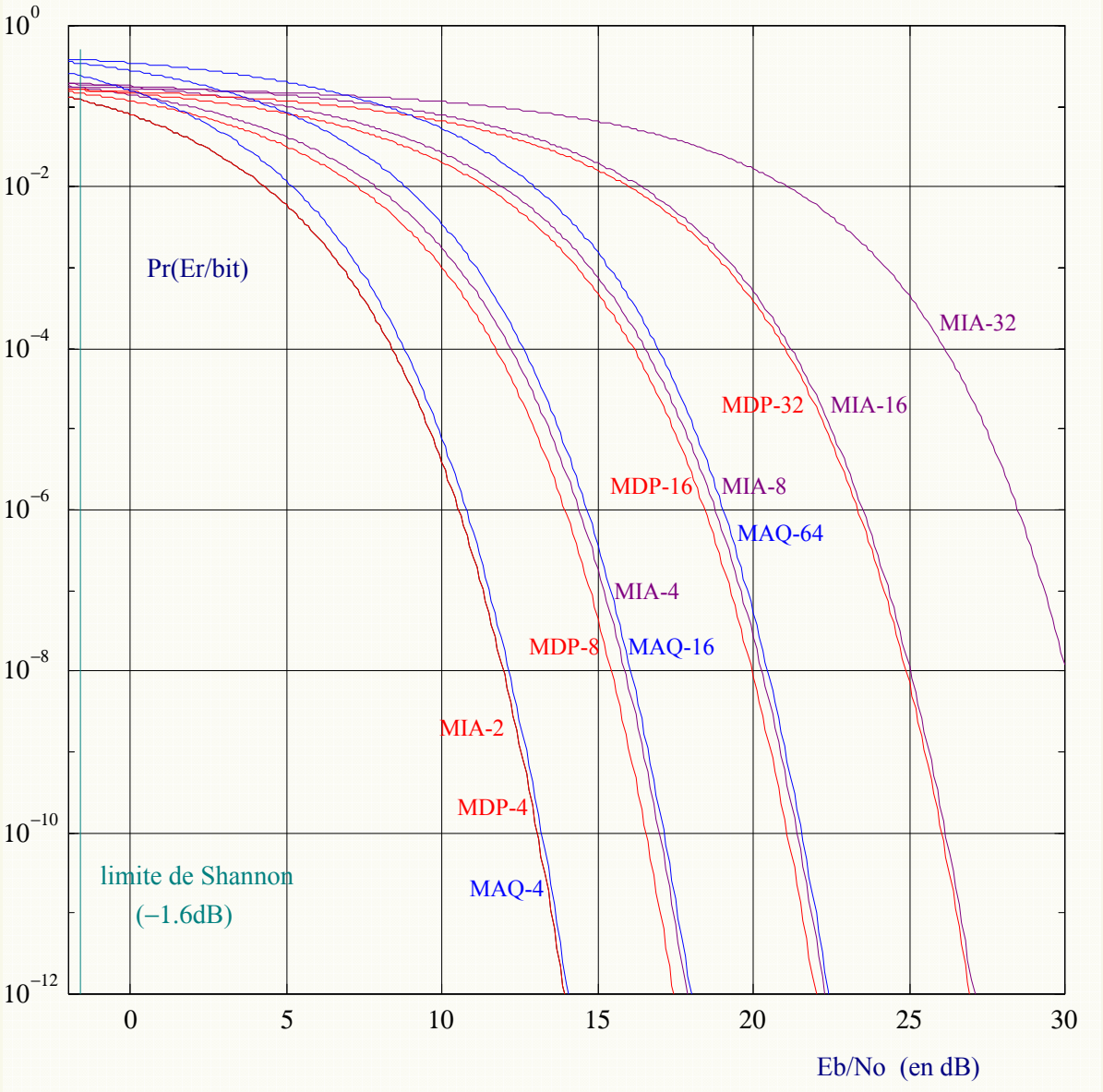
$$d^2 = 2E_s - 2E_s \cos\left(\frac{2\pi}{M}\right) = 4E_s \sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)$$

$$\Pr\{Ers\}_{\text{M-PSK}} \approx 2 \cdot Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0} \cdot 2\sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right) \cdot \log_2 M}\right)$$



Performances des Modulations Numériques Linéaires

MIA-*M* MAQ-*M* MDP-*M* (*M*-PAM *M*-QAM *M*-PSK)



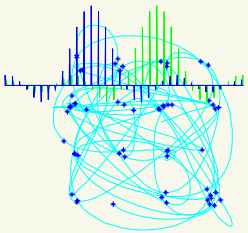
$$\Pr_{M\text{-PAM}}\{Ers\} = 2 \cdot \frac{M-1}{M} \cdot Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0} \cdot \frac{6\log_2 M}{M^2-1}}\right)$$

$$\Pr_{M\text{-QAM}}\{Ers\} \approx 4 \cdot \frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}} \cdot Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0} \cdot \frac{6\log_2 \sqrt{M}}{M-1}}\right)$$

$$\Pr_{\text{M-P}SK}\{Ers\} \approx 2 \cdot Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0} \cdot 2\sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right) \cdot \log_2 M}\right)$$

Modulations Numériques de Fréquence

MDF-*M* (*M*-FSK)



Modulation par Sauts de Fréquence

Frequency Shift Keying *M*-FSK

Modulation de fréquence à phase continue

Continuous Phase CPFSK

Modulations Numériques de Fréquence

MDF≠MF (FSK≠FM, PSK≠PM)

Signal d'Enveloppe Constante.

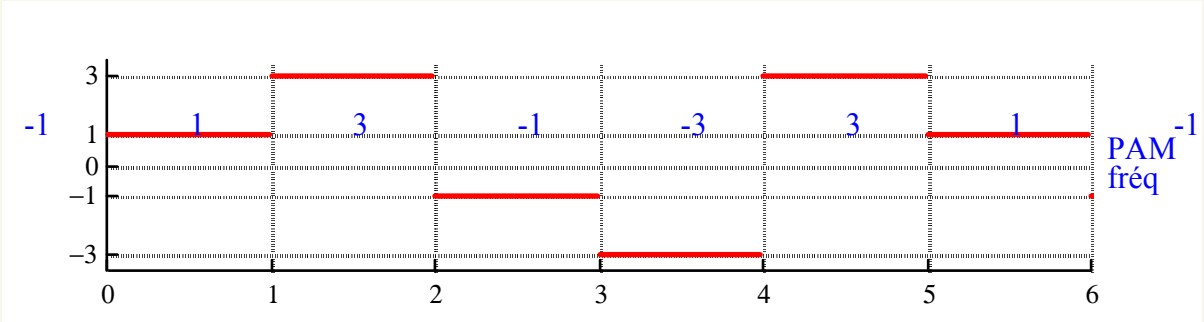
$$s(t) = \sum_k A \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\omega_0 t + \phi(t)) \cdot \Pi_{T_s}(t - kT_s)$$

Puissance $P = A^2 = E_s \cdot D_s$

Fréquence Instantanée = (*M*-PAM) *(sauts)*

$$f(t) = \frac{d\phi(t)}{2\pi\, dt} = f_0 + f_d \cdot \sum_k d_k \cdot g(t - kT_s)$$

$$g(t) = \Pi_{T_s}(t)$$

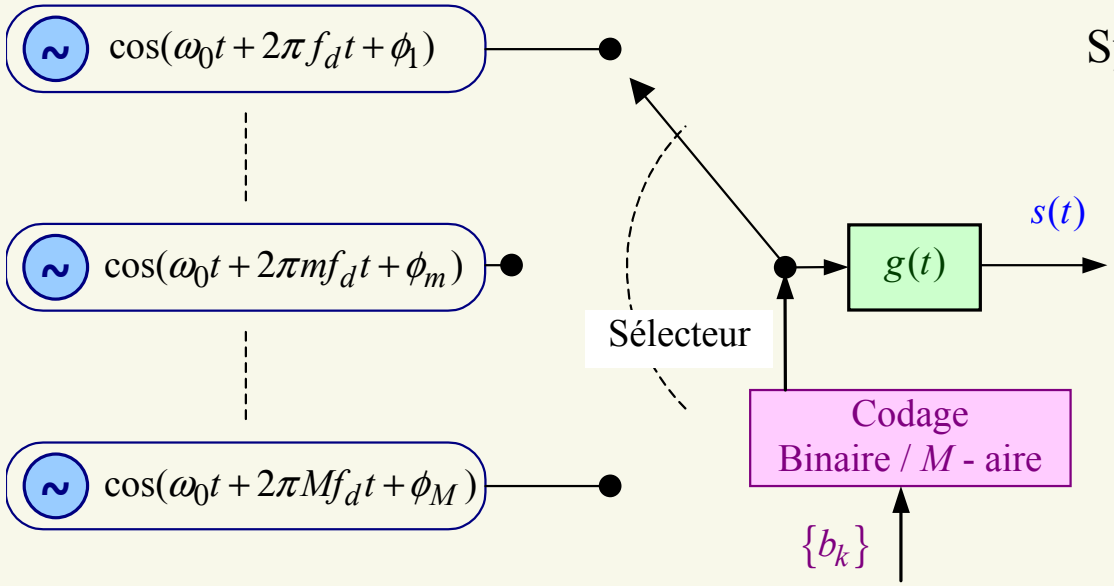


***M* Fréquences** $f_m = f_0 + m \cdot f_d$

***M* Formes** $s_m(t) = A \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\omega_0 t + 2\pi m f_d t + \phi_m) \cdot \Pi_{T_s}(t)$

Enveloppes complexes $\alpha_m(t) = A \cdot e^{j2\pi m f_d t} \cdot e^{j\phi_m} \cdot \Pi_{T_s}(t)$, ϕ_m Phase de la Porteuse m

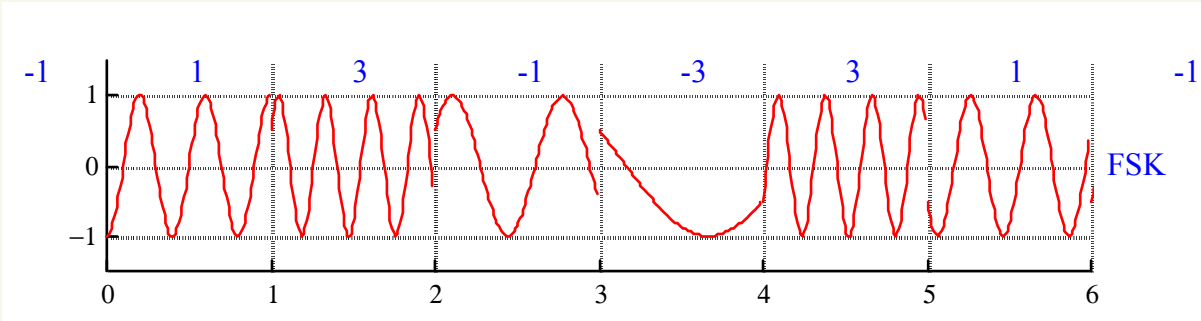
Modulation par Sauts de Fréquences (FSK)



Synoptique du modulateur MDF-M à sauts de fréquences.

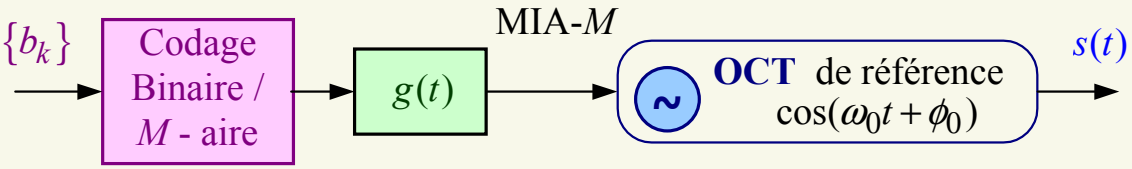
M Oscillateurs différents M Phases ϕ_m différentes

Sauts de phases $\Rightarrow$ Spectre plus Large



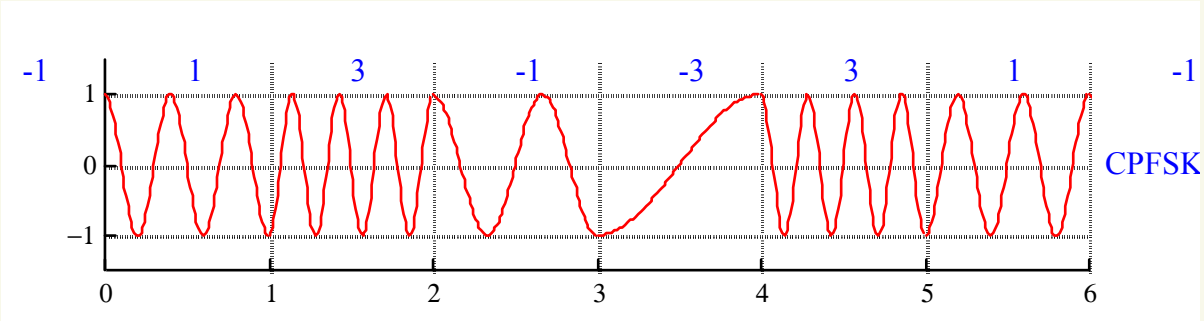
Modulation de Fréquence à Phase Continue (CPFSK)

Synoptique d'un modulateur MDF-*M* cohérent ou à phase continue.



Même Phase $\phi_m = \phi \Rightarrow$ Un seul Oscillateur commandé en tension (OCT) ou (VCO)

Continuité de phase $\Rightarrow$ Spectre plus Compact



- **Détection Synchrone (cohérente) : CPFSK seulement**
- **Détection d'Enveloppe (non cohérente) : CPFSK et FSK sauts de phases**

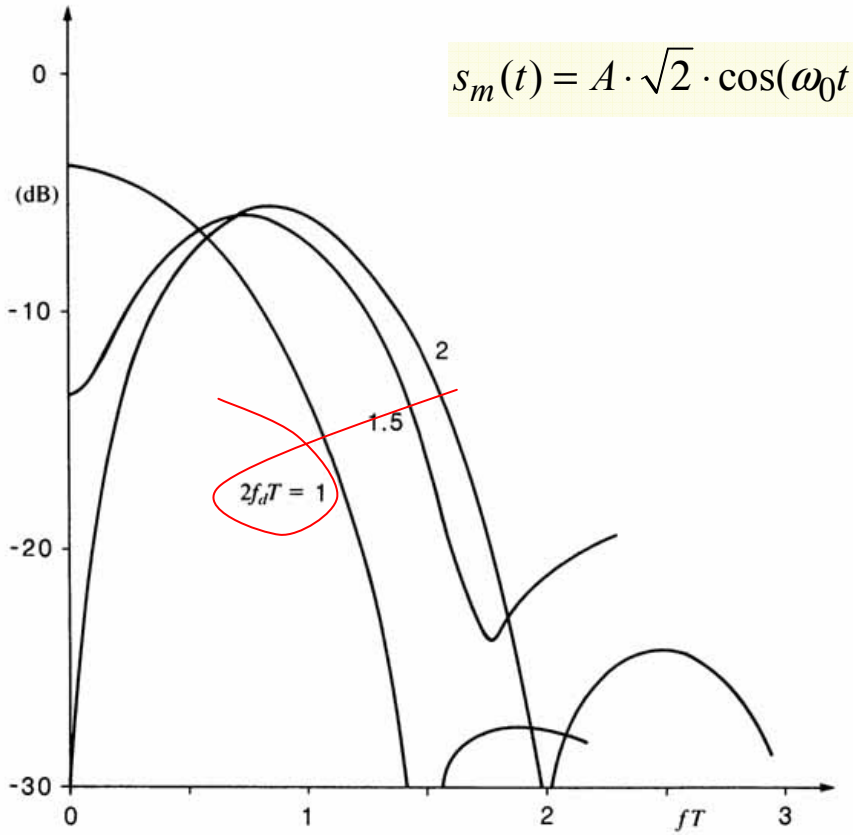
Modulation Numérique de Fréquence

Densité Spectrale de Puissance

$$S_s(f) = \frac{1}{MT}\left(\underbrace{\sum_i |S_i|^2 - \frac{1}{M}\left(\left|\sum_i S_i\right|^2\right)}_{} + \frac{1}{M}\left(\sum_i \sum_j S_i S_j^*\right)\left(\frac{1}{T}\coprod_{\frac{1}{T}}(f)\right)\right)$$

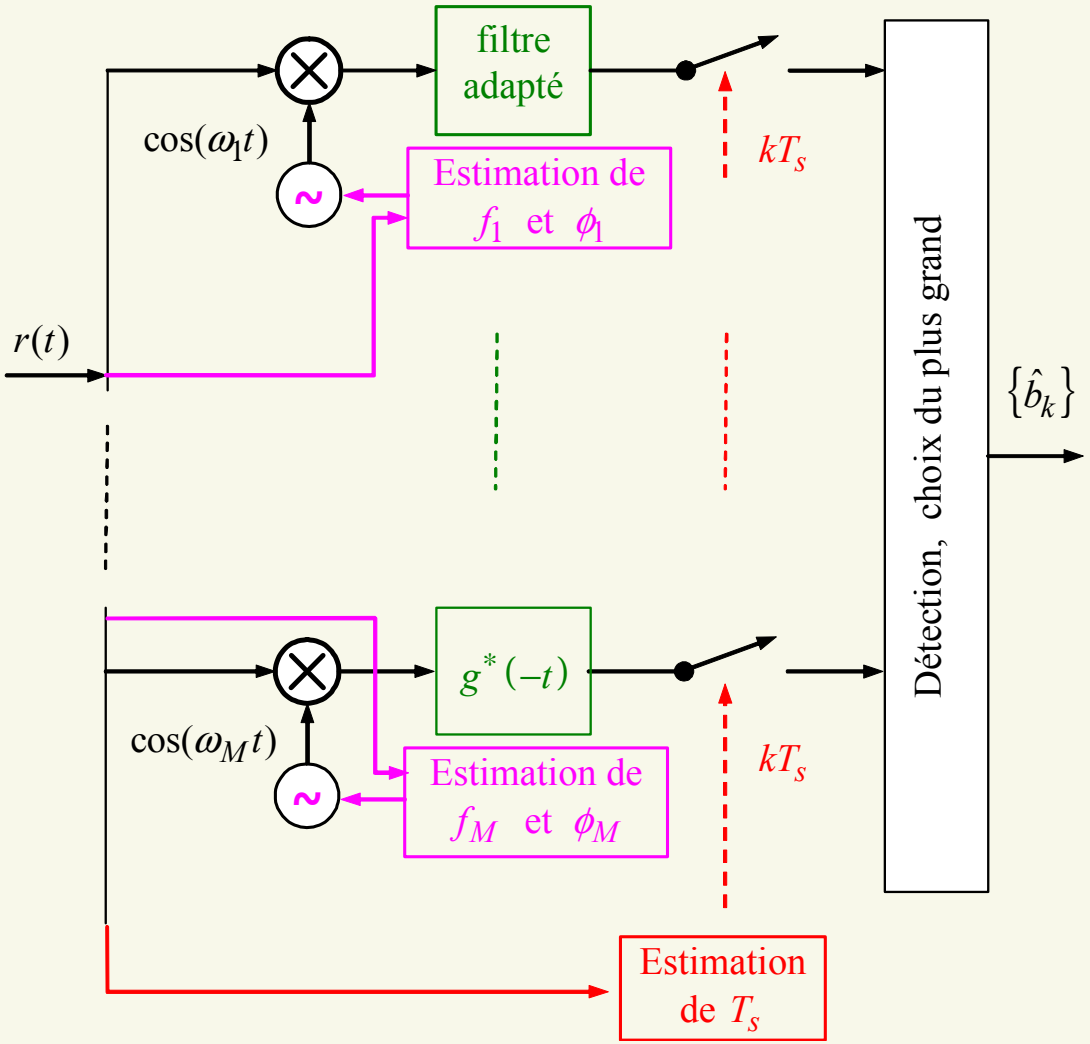
DSP de la MDF-2 à sauts de fréquences, (partie continue)

$$s_m(t) = A \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\omega_0 t + 2\pi m f_d t + \phi_m) \cdot \Pi_{T_s}(t)$$



Récepteur Optimal Cohérent (BABG) en Modulation de Fréquence FSK

Synoptique



$$s_m(t) = A \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\omega_0 t + 2\pi m f_d t + \phi_m) \cdot \Pi_{T_s}(t)$$

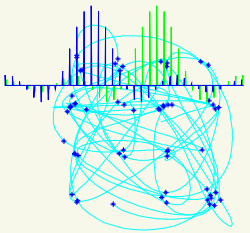
Récepteur optimal cohérent pour
des modulations de fréquence
à saut de phases M-FSK

Une seule phase à estimer si CPFSK

Probabilité d'Erreur :

celle des signaux M-aires Orthogonaux

$$\Pr\{Erb\} \le \frac{M}{2} \cdot \log_2 M \cdot Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0} \cdot \log_2 M}\right)$$



Détection Cohérente, conditions d'Orthogonalité.

Formes $s_m(t) = A \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\omega_0 t + 2\pi m f_d t + \phi_m) \cdot \Pi_{T_s}(t)$

Produit Scalaire $\langle s_m, s_n \rangle = \int_0^{T_s} s_m(t) \cdot s_n(t) \cdot dt$

$$\langle s_m, s_n \rangle = 2A^2 \cdot \int_0^{T_s} \left(\cos\left(2\pi(m-n) f_d t + \phi_m - \phi_n\right) + \cos\left(2\omega_0 t + 2\pi(m+n) f_d t + \phi_m + \phi_n\right) \right) dt$$

$$\langle s_m, s_n \rangle \approx 2A^2 \cdot \frac{\sin\left(2\pi(m-n) f_d T + \Delta\phi\right) - \sin\left(\Delta\phi\right)}{2\pi(m-n) f_d}$$

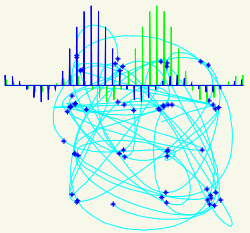
$\forall\, \Delta\phi$ **Signaux orthogonaux** si $2\pi(m-n) f_d T = 2k\pi$ soit $\boxed{f_d = k / T_s = kR}$

Pour la forme recherchée, le produit scalaire doit être maxi :

$$\langle s_m, \hat{s}_m \rangle \approx 2A^2 \cdot \int_0^{T_s} \cos\left(\phi_m - \hat{\phi}_m\right) dt \quad = 2A^2 T \cos\left(\phi_m - \hat{\phi}_m\right) \neq 0$$

Le Récepteur doit **Estimer** les **Fréquences** et les **Phases** ϕ_m des porteuses. (Très pénalisant)

Modulations Numériques



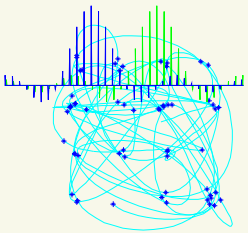
Critères de Comparaison

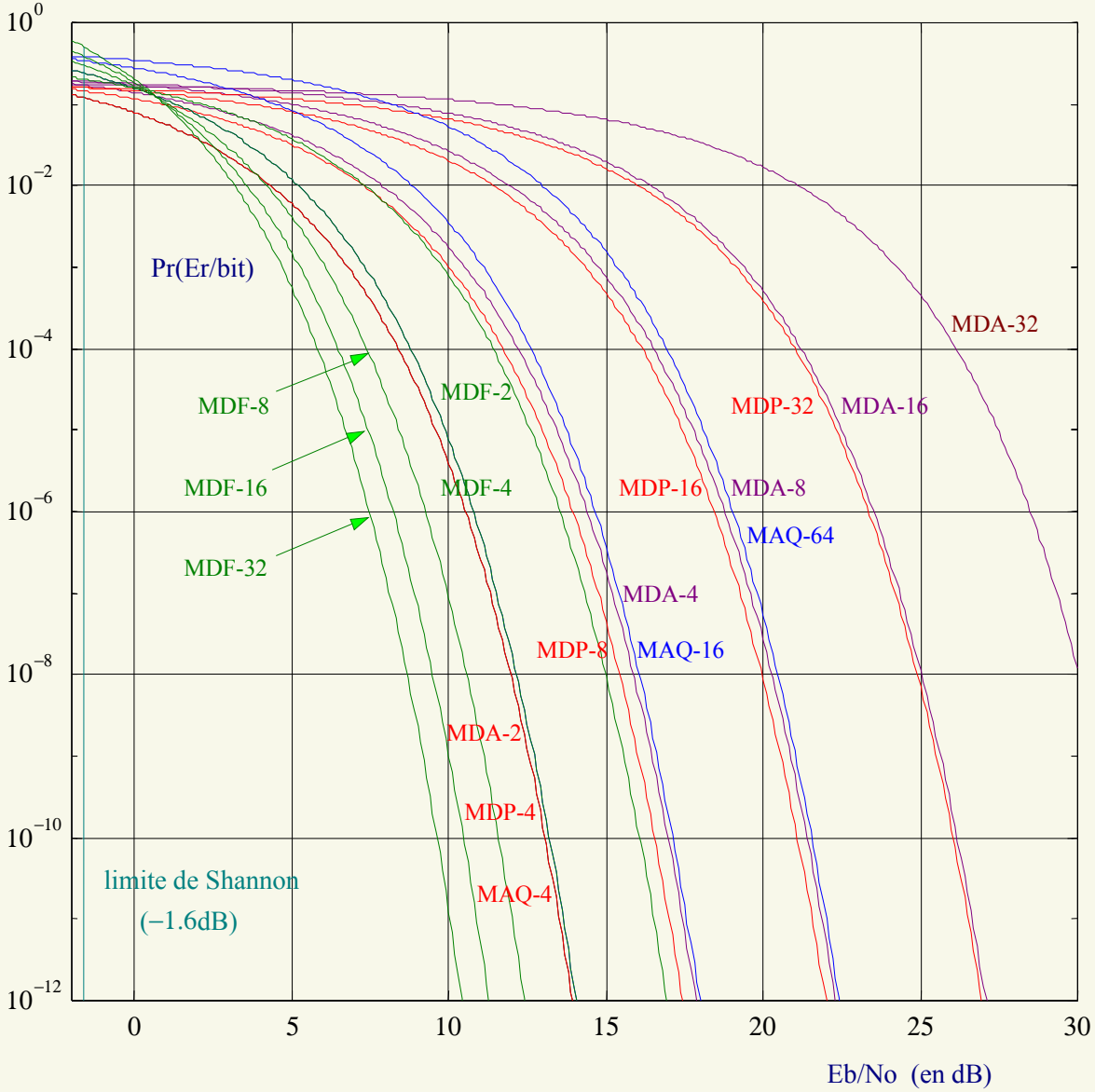
Complexité / Coût

DSP / Efficacité Spectrale

Performances (Taux d'Erreur) / Puissance émise

Comparaison des Modulations Numériques





Performances en
Probabilité d 'Erreur
ou
Taux d'Erreur

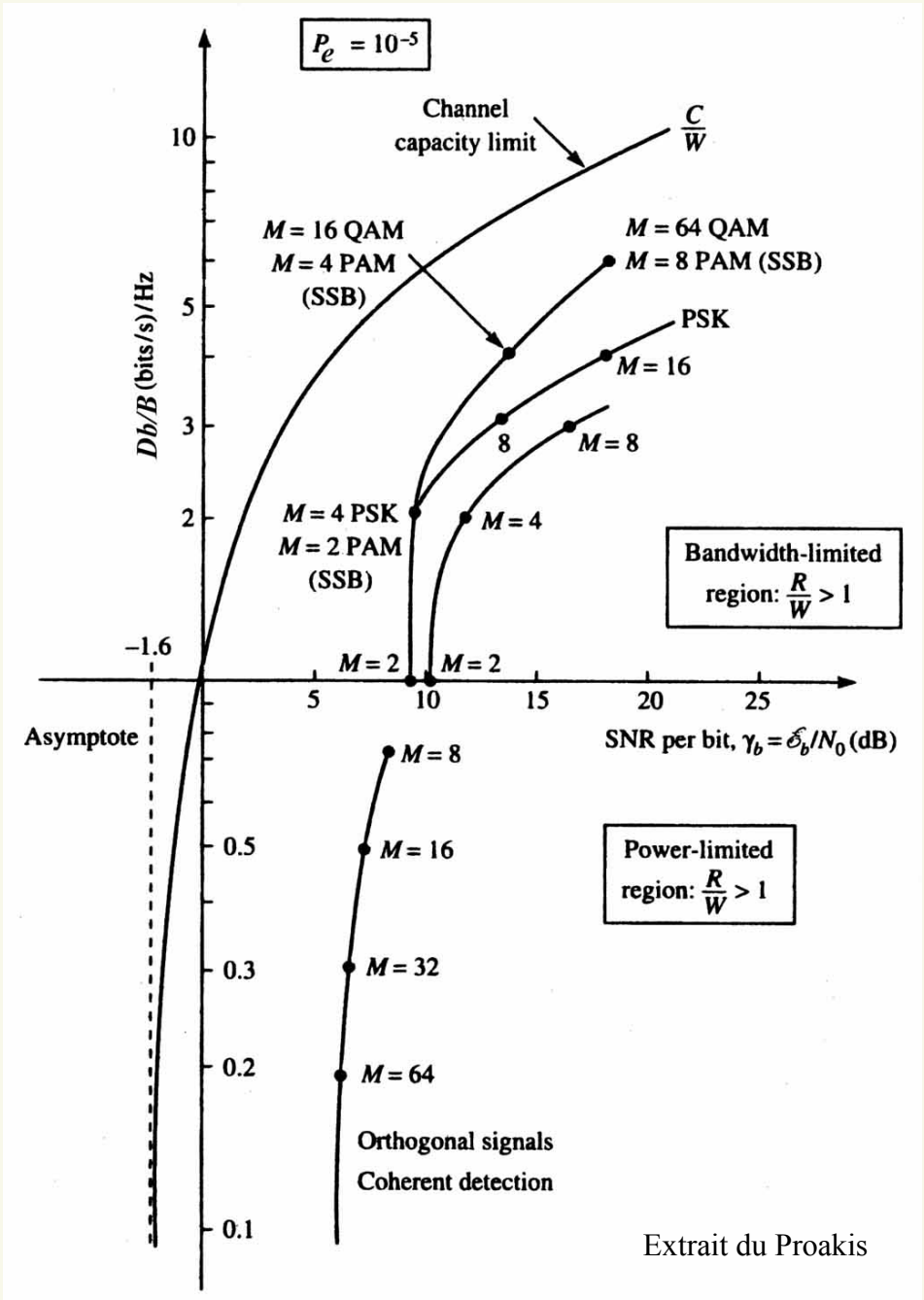
Probabilité d'erreur par bit
fonction du rapport S/B

Hypothèses

Modulation sans mémoire
Canal Idéal à BABG
Récepteur Optimal Cohérent

Puissance émise P_e et BABG fixés
$\Rightarrow$ E_b / N_0 fixé

Comparaison des Modulations Numériques



Extrait du Proakis

Comparaison des modulations

à $\Pr\{Ers\} = 10^{-5}$

Efficacité Spectrale $\eta = \frac{D_b}{B}$

Limite de Shannon

$$C = B \cdot \log_2\left(1 + \frac{P_s}{P_b}\right)$$

$$= B \cdot \log_2\left(1 + \frac{E_b D_b}{N_0 B}\right)$$

$$\frac{C}{B} = \log_2\left(1 + \frac{E_b}{N_0} \cdot \frac{D_b}{B}\right)$$

$$x = \log_2\left(1 + \frac{E_b}{N_0} \cdot x\right)$$

$$1 + \frac{E_b}{N_0} \cdot x = e^{x \ln 2} \simeq 1 + x \cdot \ln 2 + \varepsilon$$

$$\ln 2 = 0.69 \equiv -1.6\,\text{dB}$$