**CORRIGE du Contrôle1 de CN21 2006/2007**

**Modulation Orthogonale.** On considère une source binaire, au débit $D_b = 16\text{Mbit/s}$. Les données binaires $\{b_l\}$ sont i.i.d à valeurs $b_l \in \{\pm 1\}$ de probabilité $\Pr\{b_l = +1\} = 1/2$.

On transmet ces données par une modulation à 16 états répartis sur quatre MAQ-4 dont les porteuses sont orthogonales de fréquences $f_n = f_0 + nf_d$ , $n \in \{1,2,3,4\}$. $f_0 = 10\text{GHz}$.

Le signal émis est $x(t)$, tel que sur la durée $kT_s$, $d_{pk}$ et $d_{qk}$ sont les bits en phase et quadrature de la porteuse émise de fréquence $f_{n_k}$. (une seule porteuse est émise à chaque symbole)

$$x(t) = \sum_k \left( d_{pk}\sqrt{2}\cos\left(2\pi\left(f_0 + n_k f_d\right)t\right) - d_{qk}\sqrt{2}\sin\left(2\pi\left(f_0 + n_k f_d\right)t\right)\right) \cdot g(t - kT_s) \ .$$

1. Comment répartir les bits sur les MAQ-4 ? Quel est le débit symbole $D_s$ ? Combien un symbole peut-il prendre de formes (Valence $M$) ?

Chaque MAQ-4 porte deux bits et choisir une MAQ parmis 4 correspond à deux autres bits, on groupe donc la suite binanire en paquets de 4 bits les deux premiers pour choisir la modulation et les deux suivants pour la position dans la MAQ.

Le débit symbole est 4 fois plus lent que le débit binaire ici $D_s = 4\text{Mbaud}$, la valence est $M = 16$.

2. Quelle est l'expression $x_n(t)$ d'une des MAQ-4 ? Quel est son équivalent BdB $\alpha_{x_n}(t)$ par rapport à la fréquence $f_0$ ?

$$x_n(t) = \text{Re}\left\{\alpha_{x_n}(t)\sqrt{2}e^{-j2\pi f_0 t}\right\} = p_n(t)\sqrt{2}\cos\left(2\pi f_0 t\right) - q_n(t)\sqrt{2}\sin\left(2\pi f_0 t\right)$$

$$p_n(t) = \sum_k \left(d_{pk,n}\cos\left(2\pi n f_d t\right) - d_{qk,n}\sin\left(2\pi n f_d t\right)\right)\cdot g(t - kT_s)$$

$$q_n(t) = \sum_k \left(d_{pk,n}\sin\left(2\pi n f_d t\right) + d_{qk,n}\cos\left(2\pi n f_d t\right)\right)\cdot g(t - kT_s)$$

$$\alpha_{x_n}(t) = p_n(t) + jq_n(t) = \sum_k \left(\left(d_{pk,n} + jd_{qk,n}\right)\exp\left(+j2\pi n f_d t\right)\right)\cdot g(t - kT_s)$$

3. Donner l'équivalent BdB $\alpha_x(t)$ de cette modulation, $\alpha_x(t) = \sum_k d_k(t)\cdot g(t - kT_s)$ avec $g(t) = A\cdot\Pi_{T_s}(t)$. Préciser les $M$ formes $a_i(t)$ possibles d'un symbole en équivalent BdB.

Les quatre modulations sont semblables :

$$\alpha_x(t) = \sum_k \left(\left(d_{pk} + jd_{qk}\right)\exp\left(+j2\pi n_k f_d t\right)\right)\cdot g(t - kT_s)$$

Les $d_{pk}$ et $d_{qk}$ sont des bits +1 ou -1 et $n_k \in \{1,2,3,4\}$

$$a_i(t) = a_{nl}(t) = \text{e}^{jl\frac{\pi}{4}}\,\text{e}^{j2\pi n f_d t} \in \left\{\pm(1 \pm j)\exp\left(+j2\pi n f_d t\right)\right\};\ \ n,l \in \{1,2,3,4\} \text{ et donc } M = 16.$$

4. Quelle est la condition d'orthogonalité entre les porteuses ?

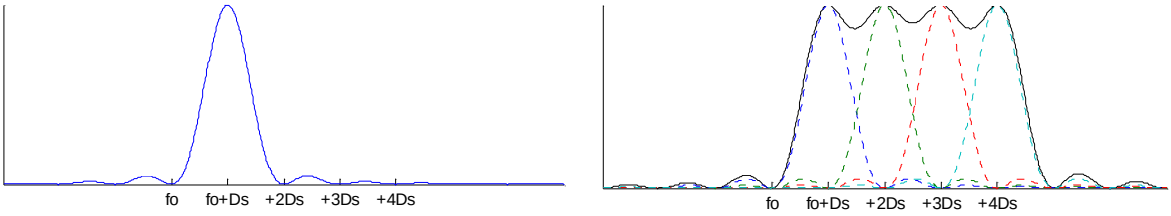
Sans tenir compte de la phase, deux porteuses numériques sont orthogonales si leur écart de fréquence est $f_d = m\cdot D_s$. On espace donc les porteuses du débit symbole.

5. Quel est la DSP d'une des MAQ-4 ? Quelle est la DSP de la modulation ? (pas de calcul).

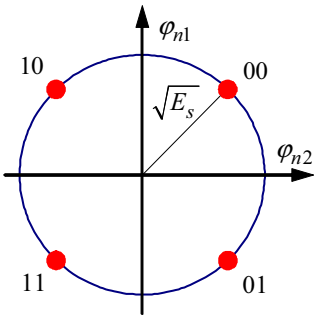
La DSP d'une des MAQ-4 (supposée à symboles iid équiprobables) est :

$$S_{MAQ-4}(f)=\frac{1}{2}\{S_\alpha(f-f_n)+S_\alpha(-f-f_n)\} \quad \text{avec} \quad S_\alpha(f)=A^2T_S\text{sinc}^2(\pi fT_s)\left\{\sigma_d^2\right\}$$

La modulation émet aléatoirement une des 4 MAQ-4 espacées de $D_s$ le spectre résultant est la superposition des spectres de ces quatre MAQ.




6. Représenter la constellation d'une MAQ-4. Décrivez la constellation de la modulation, combien y a-t-il de directions orthogonales ? Peut-on faire un codage de Gray ?




MAQ-4

$$\varphi_{n1}(t)=\frac{g(t)}{\sqrt{E_g}}\sqrt{2}\cos(2\pi f_nt)$$

$$\varphi_{n2}(t)=\frac{g(t)}{\sqrt{E_g}}\sqrt{2}\sin(2\pi f_nt)$$

La constellation de la modulation est quatre fois celle de la MAQ-4 sur des directions orthogonales, les sinus et les cosinus étant orthogonaux deux à deux, cela fait 8 directions orthogonales telles que $\langle\varphi_{ni}(t),\varphi_{mj}(t)\rangle=0\ ;\forall\ i,j\in\{1,2\}$ et $m,n\in\{1,2,3,4\}$ $m\neq n$ ou $i\neq j$.

Un point à $M-1$ voisinsà $d_{\min}$, le codage de Gray n'est pas possible.

7. Calculer les énergies moyennes par symbole $E_s$ et par bit $E_b$ en fonction de A et $T_s$ pour $f_d=1/T_s$. Quelle est alors la distance minimale entre les formes ?

Les 16 points étant équiprobables, leur énergie est identique et égale à $\sqrt{E_s}$ et la distance minimale est la même que pour une simple MAQ-4 : $d_{\min}=\sqrt{2E_s}$.

Un symbole n'émet q'une MAQ-4 d'énergie $E_s=2A^2T_s$ quelle que soit la porteuse. $E_b=E_s/4$.

8. Quelle serait la structure schématique du récepteur optimal au minimum de probabilité d'erreur en canal à BABG (pas de calcul) ?

Structure classique : un banc de filtres adaptés à chaque forme $a_{nl}(t)$ ou $s_{nl}(t)$ suivis d'un échantillonnage et d'une décision à la plus grande des composantes.

Exemple : le filtre adapté à $a_{nl}(t)$ ou $s_{nl}(t)$ a pour réponse impulsionnelle :

$$a_{nl}^{*}(-t) = e^{-jl\frac{\pi}{4}} e^{j2\pi n f_d t} \quad \text{ou} \quad s_{nl}(-t) = \pm g(-t)\cos(2\pi(f_0 + nf_d)t) \pm g(-t)\sin(2\pi(f_0 + nf_d)t)$$

Ce banc de 16 filtres est plus simple à réaliser par quatre démodulateurs MAQ en parallèle avec détection des bits émis sur les voies en phase et quadrature.

9. Ce système vérifie-t-il le critère de Nyquist (justifier rapidement) ?

L'impulsion émise (et reçue) est limitée à une durée $T_s$ puisque $g(t) = A \cdot \Pi_{T_s}(t)$.

En sortie du filtre adapté les impulsions sont limitées par $g(t) * g(-t) = A^2 T_s \cdot \Lambda_{2T_s}(t)$ qui s'annule tous les multiples de $T_s$.

10. En utilisant la borne de l'union, déterminez le majorant de la probabilité d'erreur symbole résiduelle pour ce récepteur, avec un bruit centré de DSP $N_0/2$ ?

$$\Pr\{Ers\} \le \sum_{i=1}^{M} \left( \sum_{j \ne i} \mathrm{Q}\left( \sqrt{\frac{d_{ij}^2}{2N_0}} \right) \right) \cdot \Pr\{H_i\}$$

a) Récepteur à banc de filtre adaptés :

Les huit porteuses (sinus et cosinus) sont orthogonales en faisant une rotation de 45° des directions, on voit que les 16 points sont sur 8 directions orthogonales et un point est à la distance minimale de tous les autres sauf celui qui lui est opposé sur sa direction.

La distance minimale est $d_{\min} = \sqrt{2E_s}$

Le majorant est $\Pr\{Ers\} \le \sum_{i=1}^{16} \left( 15\mathrm{Q}\left( \sqrt{\frac{d_{\min}^2}{2N_0}} \right) \right) \cdot \frac{1}{16} = 15\mathrm{Q}\left( \sqrt{\frac{2E_s}{2N_0}} \right) = 15\mathrm{Q}\left( \sqrt{4\frac{E_b}{N_0}} \right)$.

b) Récepteur à 4 MAQ-4 :

On peut imaginer de choisir d'abord la bonne démodulation puis faire une restitution correcte des deux derniers bits.

On peut raisonner en Probabilité de décision correcte d'un symbole :

$$\Pr\{DcSymb\} = \Pr\{(Dc \text{ porteuse}) \text{ et } (Dc \text{ MAQ})\} = \Pr\{(Dc \text{ MAQ})/\text{porteuse}\} \cdot \Pr\{Dc \text{ porteuse}\}$$

D'après la répartition initiale, chaque porteuse est indépendantes des autres et à une probabilité ¼ de se produire. Le choix de la bonne porteuse peut se faire par un système à détection d'énergie (quadratique) où la décision (et la probabilité qui s'en suit) est élaborée suivant le même principe du minimum d'erreur ou du MV que le récepteur linéaire mais donne des résultats un peu différents.

La probabilité d'erreur sur les deux derniers bits est celle d'une MAQ-4 : $\Pr\{Erb\} \approx \mathrm{Q}\left( \sqrt{2\frac{E_b}{N_0}} \right)$