2 Détection

2.1 Signaux orthogonaux

On doit avoir le produit scalaire de deux formes $\langle s_i(t) \mid s_j(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} s_i(t) \cdot s_j^*(t) dt = 0$

et l'énergie d'un signal : $\langle s_i(t) \mid s_i(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} |s_i(t)|^2 \, dt = E_s = R_{s_i}(0)$ = fonction d'auto-corrélation prise en zéro.

1) **Exemples de réalisations :**

On fait une affectation directe de *m* bits à 1 symbole, on a donc $M = 2^m$ formes.

1.a) On peut créer $M = 2^m$ signaux orthogonaux par **décalage fréquentiel** :

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cdot \cos\left(\frac{2\pi i t}{T}\right) \cdot \Pi_T(t) \quad \text{pour} \quad i \in \{1, \ldots, M\}$$

ou en utilisant les sinus et les cosinus : pour $i \in \{1, \ldots, M/2\}$

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cdot \cos\left(\frac{2\pi i t}{T}\right) \cdot \Pi_T(t) \quad \text{et} \quad s_i'(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cdot \sin\left(\frac{2\pi i t}{T}\right) \cdot \Pi_T(t)$$

1.b) On peut créer $M = 2^m$ signaux orthogonaux par **décalage temporel** :

$$s_i(t) = \sqrt{E_s} \cdot g(t - iT) \quad \text{pour} \quad i \in \{1, \ldots, M\}$$

$g(t)$ est une fonction normée telle que son support temporel n'excède pas T_s / M, ou aussi, mais plus subtilement, dont l'autocorrélation satisfait le critère de non IES :

$$R_g(mT_s) = R_g(0) \cdot \delta_{m,0} \Leftrightarrow \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} |G(f - mD_s)|^2 = T_s \cdot R_g(0)$$

(La transmission sans interférence entre les symboles est équivalente à une transmission sur les composantes d'une base orthonormée particulière).

1.c) On peut créer $M = 2^N$ signaux orthogonaux par **d'autres formes particulières** :

En particulier des séquences codées permettent d'obtenir ce résultat. Par exemple les suites : $++++$, $+--+$, $+-+-$, avec une forme NRZ.

2) **Représentation vectorielle des signaux :**

Le récepteur d'une liaison numérique réalise la projection du signal reçu sur les formes émises (filtres adaptés aux $s_i(t)$). La projection est réalisée suivant le produit scalaire, défini ci-dessus, dans l'espace de Hilbert des signaux de carré intégrable. Si le signal reçu est $x(t)$ chaque composante du récepteur effectue $\int_{\mathbb{R}} x(t) \cdot s_i^*(t)\, dt$ qui est l'intercorrélation $R_{x,s_i}(0)$ (on parle de récepteur à corrélation).

Pratiquement cette fonction est équivalente au filtrage de $x(t)$ par $h_{Ri}(t) = s_i^*(-t)$, (filtre LIT), suivi d'un échantillonnage en zéro.

En effet : $z(t) = x(t) * s_i^*(-t) = \int_{\mathbb{R}} x(u) \cdot s_i^*(u+t) du = R_{x,s_i}(-t)$ et $z(0) = R_{x,s_i}(0)$

La représentation vectorielle s'obtient en projettant le signal reçu sur une base orthonormée $\{\varphi_1(t), \ldots, \varphi_K(t)\}$. Comme les formes sont orthogonales, on prend pour base orthonormée : $\mathcal{B} = \left\{ \varphi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_s}}, \ldots, \varphi_M(t) = \frac{s_M(t)}{\sqrt{E_s}} \right\}$, la projection des signaux $s_i(t)$ sur cette base donne le vecteur : $\mathbf{s}_i^T = [s_{i1}, \ldots, s_{ii}, \ldots, s_{iM}] = \left[0, \ldots, 0, \sqrt{E_s}, 0, \ldots, 0\right]$.

Seule la $n^{\text{ième}}$ composante du vecteur signal est non nulle et de valeur $\sqrt{E_s}$.

L'énergie moyenne par symbole est :

$$E_s = \mathrm{E}\{E_i\} = \sum_{i=1}^{M} E_i \cdot p_i \quad \text{avec} \quad E_i = \int_{\mathbb{R}} |s_i(t)|^2 \, dt = R_{s_i}(0) = |\mathbf{s}_i|^2$$

En présence de bruit (BABG), l'observation $z(t) = x(t) + b(t)$, et représentée sur la base orthonormée $\mathcal{B}$ par le vecteur $\mathbf{z}^T = [z_1, \ldots, z_i, \ldots, z_M]$.

Si le signal $s_i(t)$ est émis, alors le vecteur d'observation est :

$$\mathbf{z}^T = [b_1, \ldots, b_{i-1}, \sqrt{E_s} + b_i, b_{i+1}, \ldots, b_M] = \mathbf{s}_i + \mathbf{b}$$

Le vecteur de bruit $\mathbf{b}^T = [b_1, \ldots, b_i, \ldots, b_M]$ est centré, de matrice de covariance $\mathbf{R}_b = \mathrm{E}\left\{\mathbf{b}\mathbf{b}^H\right\}$.

Dans le cas où les filtres adaptés forment une base orthonormée $\mathbf{R}_b = \frac{N_0}{2} \cdot \mathbf{I}_M$.

$\mathbf{R}_b = \mathrm{E}\left\{ \mathbf{b}\mathbf{b}^H \right\} = \sigma_b^2 \cdot \mathbf{I}_M = \frac{N_0}{2} \cdot E_s \cdot \mathbf{I}_M$ si la base est simplement orthogonale.

Si la projection se fait sur une base orthonormée $\{\varphi_1(t),\ldots,\varphi_K(t)\}$ de dimension $K > M$ on peut décomposer l'espace vectoriel des signaux observés en un sous-espace signal de dimension *M* et un sous espace bruit de dimension $K - M$, on a alors une référence bruit seul qui peut être utilisée pour améliorer la détection (voir exercice VII.1).

3) Règle de décision à maximum de vraisemblance :

La probabilité d'erreur minimale sur la détection des symboles correspond à un récepteur réalisant le critère du maximum de vraisemblance à posteriori (MAP).

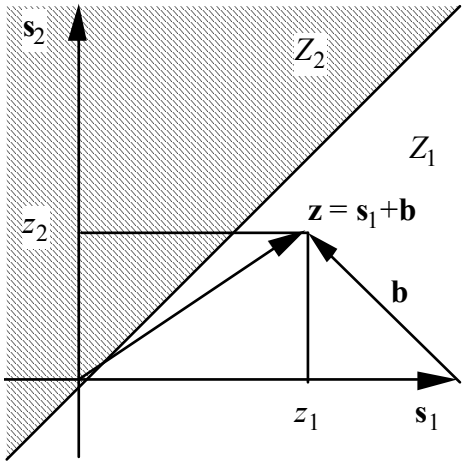
Si les hypothèses sont équiprobables $P(H_i) = p_i = 1/M$ le critère du MAP est équivalent au critère du MV (à priori) qui est défini par :

$$\max_{i=1,..,M}\left(\Pr(\mathbf{z}/\mathbf{s}_i)\right) = \max_{i=1,..,M}\left(\frac{1}{(\pi N_0)^{M/2}}\exp\left(-\frac{|\mathbf{z}-\mathbf{s}_i|^2}{N_0}\right)\right) = \max_{i=1,..,M}\left(\mathrm{Re}\left\{\mathbf{z}^H\cdot\mathbf{s}_i\right\}\right) = \max_{i=1,..,M}\left(\mathbf{z}^T\cdot\mathbf{s}_i\right)$$

La règle de décision, en Bruit Additif Blanc Gaussien, est fondée sur l'expression de la projection de l'observation **z** sur l'ensemble des signaux ou sur une base orthonormée de l'espace des signaux.

La règle de décision consiste à rechercher la plus grande composante de l'observation.

cas 2D



4) Probabilité de décision correcte :

$$\Pr(Dc) = \sum_{i=1}^{M} \Pr\left(\text{Décider } H_i / H_i \text{ émis}\right)\cdot p_i$$

Soit pour des hypothèses équiprobables et une base orthonormée (zones de décision identiques) :

$$\Pr(Dc) = \Pr\left(\text{Décider } H_i / H_i \text{ émis}\right) \quad \forall i$$

En prenant par exemple $i = 1$:

$$\Pr(Dc) = \Pr\left(\mathbf{z}^T \cdot \mathbf{s}_2 < \mathbf{z}^T \cdot \mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{z}^T \cdot \mathbf{s}_M < \mathbf{z}^T \cdot \mathbf{s}_1 / \mathbf{z} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{b}\right)$$

Sous l'hypothèse, H_1 émis, $z_j = b_j \quad \forall j \neq 1$ et $z_1 = b_1 + \sqrt{E_s}$

$$\Pr(Dc) = \Pr\left(z_2 < z_1, \ldots, z_M < z_1 / z_1 = \sqrt{E_s} + b_1\right)$$

Les variables b_i ou z_i sont indépendantes et de matrice de covariance $\mathbf{R}_b = \frac{N_0}{2} \cdot \mathbf{I}_M$.

$$\Pr(Dc) = \int_{Z_i} \frac{1}{(\pi N_0)^{M/2}} \exp\left(-\frac{\left|\mathbf{z} - \mathbf{s}_i\right|^2}{N_0}\right) \cdot dz_1 \ldots dz_N$$

Qui se factorise en :

$$\Pr(Dc) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{\left|z_1 - \sqrt{E_s}\right|^2}{N_0}\right) \cdot \prod_{j=2}^{M} \left(\int_{-\infty}^{z_1} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{\left|z_j\right|^2}{N_0}\right) dz_j \right) \right) dz_1$$

$$\Pr(Dc) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{\left|z_1 - \sqrt{E_s}\right|^2}{N_0}\right) \cdot \prod_{j=2}^{M} \left(1 - Q\left(\frac{z_1}{\sqrt{N_0/2}}\right)\right) \right) dz_1$$

en posant $y = \frac{z_1}{\sqrt{N_0/2}}$

$$\Pr(Dc) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\left|y - \sqrt{2E_s/N_0}\right|^2}{2}\right) \cdot \left(1 - Q(y)\right)^{M-1} \right) dy$$

Avec la base orthonormée la distance entre les signaux reçus est $d^2 = \left|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j\right|^2 = 2E_s$.

5) **Probabilité d'erreur (**cas $M = 2$**) :**

La probabilité d'erreur par symbole est $\Pr(Err) = \sum_{i=1}^{M} \Pr\left(Err / H_i \text{ émis}\right) \cdot p_i$

Pour des hypothèses équiprobables :

$$\Pr(Err) = \Pr\left(Err / H_i \text{ émis}\right) = \Pr\left(\bigcup_{j \neq i} \left(\text{Décider } H_j\right) / H_i \text{ émis}\right)$$

Pour $M = 2$: $\Pr(Err_2) =$

$$\Pr\left(\ \mathbf{z}^T \cdot \mathbf{s}_2 > \mathbf{z}^T \cdot \mathbf{s}_1 / \mathbf{z} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{b}\right) = \Pr\left(\ \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{s}_2 > |\mathbf{s}_1|^2 - \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{s}_1\right) = \Pr\left(\ \mathbf{b}^T \cdot (\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1) > |\mathbf{s}_1|^2\right)$$

Soit : $\Pr(Err_2) = \Pr(b_2\sqrt{E_s} > b_1\sqrt{E_s} + E_s) = \Pr(y = b_2 - b_1 > \sqrt{E_s})$

La variable y est gaussienne centrée de variance $2\sigma_b^2 = N_0$ on a alors :

$$\Pr(Err_2) = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{N_0}}\right)$$

5) Majoration de la fonction Q :

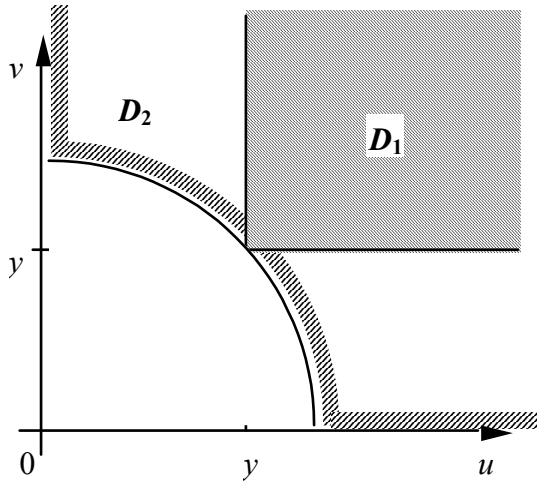
$$Q^2(y) = \left(\int_y^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\, du\right)^2 = \iint_{D_1} \frac{1}{2\pi}\, \mathrm{e}^{-\frac{u^2+v^2}{2}}\, du dv \leq \iint_{D_2} \frac{1}{2\pi}\, \mathrm{e}^{-\frac{u^2+v^2}{2}}\, du dv$$

Le domaine D_1 est inclus dans D_2.

$$Q^2(y) \leq \iint_{D_2} \frac{1}{2\pi}\, r\, \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}\, dr d\theta$$

$$Q^2(y) \leq \int_{y\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{1}{2\pi}\, r\, \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}\, dr$$

$$Q^2(y) \leq \int_{y\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{1}{4}\, r\, \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}\, dr$$



$$Q^2(y) \leq \frac{\mathrm{e}^{-y^2}}{4} \Rightarrow Q(y) \leq \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}$$

***6)* Probabilité d'erreur :**

La probabilité d'erreur par symbole est $\Pr(Err) = \sum_{i=1}^{M} \Pr\left(Err / H_i \text{ émis}\right) \cdot p_i$

$$\Pr\left(Err / H_i \text{ émis}\right) = \Pr\left(\bigcup_{j \neq i} \left(\text{Décider } H_j\right) / H_i \text{ émis} \right)$$

$$\Pr\left(Err / H_i \text{ émis}\right) = \Pr\left(\mathbf{z} \notin Z_i / H_i \text{ émis}\right) = \Pr\left(\mathbf{z} \in \bigcup_{j \neq i} Z_j / H_i \right) = \sum_{j \neq i} \Pr\left(\mathbf{z} \in Z_j / H_i\right)$$

Pour montrer $\lim_{M \to \infty} \left\{\Pr(Err)\right\} = 0$ on simplifie en majorant la probabilité d'erreur à l'aide de la borne de l'union.

En effet $\Pr\left(Err / H_i \text{ émis}\right) = \Pr\left(\mathbf{z} \in \bigcup_{j \neq i} Z_j / H_i \right)$, les domaines Z_j sont disjoints et leur union recouvre l'espace tout entier à l'exception de Z_i.

Considérons que la détection se fait dans le même espace de dimension M mais pour seulement deux hypothèses H_i et H_j (cas binaire), on divise alors l'espace en deux zones de décision $Z_{i,j}$ $Z_{i,i}$. séparées par un hyperplan. On a alors $Z_j \subset Z_{i,j}$ et $Z_i \subset Z_{i,i}$.

La réunion de ces demis espaces est telle que : $\bigcup_{j \neq i} Z_j = \bigcup_{j \neq i} Z_{i,j}$

$$\Pr\left(Err / H_i\right) = \Pr\left(\mathbf{z} \in \bigcup_{j \neq i} Z_{i,j} / H_i \right) = \sum_{j \neq i} \Pr\left(\mathbf{z} \in Z_{i,j} / H_i\right) - \sum_{\substack{j \neq i \\ n \neq i,j}} \sum \Pr\left(\mathbf{z} \in Z_{i,j} \bigcap Z_{i,n} / H_i\right)$$

Qu'on majore par : $\Pr\left(Err / H_i\right) \leq \sum_{j \neq i} \Pr\left(\mathbf{z} \in Z_{i,j} / H_i\right)$ (Borne de l'Union)

$\Pr\left(\mathbf{z} \in Z_{i,j} / H_i\right)$ est la probabilité d'erreur de détection de H_i dans le cas binaire de deux hypothèses H_i et H_j avec une observation $\mathbf{z}$ de dimension M. La projection se faisant sur une base orthonormée, les M composantes de bruit sont indépendantes. Les $M-2$ composantes z_m $(m \neq i, m \neq j)$ n'apportent rien sur la détection des signaux (voir exercice VII.1). On peut donc projeter sur l'espace de dimension 2 des composantes z_i et z_j et la probabilité d'erreur est la même que dans le cas binaire $M = 2$.

$$\Pr\left(\mathbf{z} \in Z_{i,j} / H_i\right) = \Pr(Err_2) = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{d_{ij}^2}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right) \quad \forall i \neq j$$

Puisque toutes les formes sont à la même distance $d = \sqrt{2E_s}$.

La probabilité d'erreur en dimension M est donc majorée par :

$$\Pr\left(Err / H_i\right) \le \sum_{j \neq i} Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right) = (M-1) \cdot Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right) = (M-1) \cdot Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

$$\Pr_{symbole}\left(Err\right) \le \sum_{i=1}^{M}\left(\sum_{j \neq i} Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right)\right) \cdot \frac{1}{M} = \sum_{i=1}^{M}\left((M-1) \cdot Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right)\right) \cdot \frac{1}{M} = \left(M-1\right) \cdot Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

La probabilité d'erreur par bit se déduit en considérant le nombre de bits faux pour chaque symbole faux . Un symbole est associé à $m = \log_2 M$ bits. Un symbole est faux si la forme (ou l'hypothèse) restituée n'est pas la bonne, il y a $M-1$ façons de se tromper de forme ($j \neq i$) et lorsqu'on se trompe il peut y avoir 1 bit qui change ou 2 bits ou….ou m bits qui changent sur les m.

Le nombre de cas où n bits changent est $\binom{n}{m}$ ce qui permet d'écrire :

$$\Pr_{bit}\left(Err\right) \le \sum_{i=1}^{M}\left(\sum_{j \neq i} \frac{\text{Nbr } n \text{ bits faux}}{m} Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right)\right) \cdot \frac{1}{M} = \sum_{i=1}^{M}\left(\sum_{n=1}^{m} \frac{n \cdot \binom{n}{m}}{m} Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right)\right) \cdot \frac{1}{M}$$

$$\Pr_{bit}\left(Err\right) \le \left(\sum_{n=1}^{m} \frac{n \cdot \binom{n}{m}}{m}\right) Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right) = \frac{m2^{m-1}}{m} Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right) \cdot \frac{2^m}{2}$$

Les $M = 2^m$ signaux sont orthogonaux donc :

$$\left|\mathbf{s}_i\right|^2 = E_s = \log_2(M) \cdot E_b = m \cdot E_b \quad \text{et} \quad d_{ij}^2 = \left|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j\right|^2 = 2E_s = 2m \cdot E_b$$

$$\Pr_{bit}(Err) \le \frac{2^m}{2} \cdot Q\left(\sqrt{\frac{2mE_b}{2N_0}}\right) \le \frac{2^m}{4} \cdot \exp\left(-\frac{mE_b}{2N_0}\right)$$

$$\Pr_{bit}(Err) \le \frac{e^{m \log_e 2}}{4} \cdot \exp\left(-\frac{mE_b}{2N_0}\right) = \frac{1}{4} \cdot \exp\left(-m\left(\frac{E_b}{2N_0} - \log_e 2\right)\right)$$

Lorsque M tend vers l'infini, $m = \log_2 M$ tend vers l'infini.

La probabilité d'erreur est majorée par une fonction qui tend vers 0 si $\frac{E_b}{2N_0} - \log_e 2 > 0$

C'est à dire : $\frac{E_b}{N_0} > 2\log_e 2 = 1,386$ soit 1,42 dB.

7) Efficacité spectrale :

La largeur de bande minimale occupée par M signaux orthogonaux ,de durée T_s,

est $B = \frac{M}{2T_s}$ Hz.

On peut par exemple utiliser les fonctions $\cos(2\pi nt/T_s)\cdot \Pi_{T_s}(t)$ et $\sin(2\pi nt/T_s)\cdot \Pi_{T_s}(t)$, qui forment une base orthonormée pour n entier.

Le choix d'un ensemble de $M = 2^m$ signaux, permet d'associer m éléments binaires à l'un d'entre eux.

Le débit symbole est $D_s = R = 1/T_s$ bauds . Le débit binaire est $D_b = m/T_s$ bit/s .

L'efficacité spectrale d'une modulation est le rapport entre le débit binaire et la largeur de bande occupée par le signal soit :

$$\eta = \frac{D_b}{B} = \frac{2m}{M} = \frac{2\log_2 M}{M} \text{ bit/s/Hz}$$

Lorsque M tend vers l'infini, l'efficacité spectrale η tend vers 0. Les signaux orthogonaux permettent de diminuer la probabilité d'erreur en approchant la capacité de canal mais avec une efficacité spectrale déplorable (voir poly de cours pp 116 & 117).

8) Capacité du canal :

Le théorème de la capacité de canal est : $C = B\cdot \log_2\left(1+\frac{P_s}{P_b}\right)$ (Shannon-Hartley).

La largeur de bande du canal de transmission des signaux orthogonaux est : $B \approx \frac{M}{2T_s}$.

La puissance du signal reçu est : $P_s = E_s D_s = E_b D_b$. La puissance du bruit est : $P_b = N_0 B$.

Pour des signaux orthogonaux on à vu que pour $M \to \infty$, $B \to \infty$ et $\eta = \frac{D_b}{B} \to 0$.

$$C_\infty = \lim_{M\to\infty}\left(B\cdot\log_2\left(1+\frac{E_b D_b}{N_0 B}\right)\right) \approx \frac{E_b D_b}{N_0 \log_e 2} = \frac{E_b \log_2 M}{N_0 T \log_e 2}$$

Le débit binaire est $D_b = \frac{\log_2 M}{T} < C$ pour la possibilité d'une transmission sans erreurs.

$$D_b < C_\infty \Leftrightarrow D_b < \frac{E_b D_b}{N_0 \log_e 2} \Leftrightarrow \frac{E_b}{N_0} > \log_e 2 \quad \text{soit } (1.4-3) = -1.6 \text{ dB}.$$

La borne obtenue pour les signaux orthogonaux (voir 6) est à 3 dB du théorème de Capacité. Elle représente malgré tout une limite pratique, appelée le **débit critique**, au-delà duquel le récepteur devient difficilement réalisable.

Exemple du canal téléphonique : $\frac{P_s}{P_b} = 1000 = 30$ dB, $B = 3$ kHz, $C = 30$ kb/s

Le débit critique est $D_c = 15$ kbit/s .

On construit des MODEMs à plus de 30 kbit/s mais ils ne fonctionnent que sur des lignes de meilleure qualité ou avec des pertes d'information.

2.2 Détection vectorielle

1) On pose $\mathbf{z}^T = [z_1,\ z_2]$, $\mathbf{A}^T = [A,\ 0]$, $\mathbf{n}^T = [n_1, n_2]$, $\mathbf{s}^T = [\pm A,\ 0] = \pm\mathbf{A}^T$

La probabilité a posteriori que le signal $\mathbf{s}$ ait la valeur $\mathbf{s} = \mathbf{A}$ est:

$$\Pr(\mathbf{z}/\mathbf{s}=\mathbf{A}) = \frac{1}{2\pi\left(\det(\mathbf{R}_n)\right)^{1/2}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{z}-\mathbf{A})^T \mathbf{R}_n^{-1}(\mathbf{z}-\mathbf{A})}{2}\right)$$

où $\mathbf{R}_n$ est la matrice de corrélation du vecteur de bruit $\mathbf{n}$: $\mathbf{R}_n = \mathrm{E}\{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}^T\}$ et $\mathbf{R}_n^{-1}$ son inverse.

$$\mathbf{R}_n = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & (1+a^2)\sigma^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{R}_n^{-1} = \frac{1}{\sigma^2 a^2}\begin{pmatrix} (1+a^2) & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \det(\mathbf{R}_n) = a^2\sigma^4$$

Le rapport de vraisemblance des deux hypothèses $\mathbf{s} = \mathbf{A}$ et $\mathbf{s} = -\mathbf{A}$ est caractérisé par :

$$\mathrm{L}(\mathbf{z}) = \frac{\Pr(\mathbf{z}\,|\,\mathbf{s}=\mathbf{A})}{\Pr(\mathbf{z}\,|\,\mathbf{s}=-\mathbf{A})} = \frac{\exp\left(-\dfrac{(\mathbf{z}-\mathbf{A})^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{z}-\mathbf{A})}{2}\right)}{\exp\left(-\dfrac{(\mathbf{z}+\mathbf{A})^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{z}+\mathbf{A})}{2}\right)}$$

La matrice $\mathbf{R}^{-1}$ est symétrique donc $\mathbf{z}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}^T\,\mathbf{R}^{-1}\mathbf{z}$

Toute fonction monotone d'une fonction de vraisemblance est encore une fonction de vraisemblance, en particulier la fonction logarithme, la suppression des termes qui ne dépendent pas des hypothèses et la multiplication par une constante positive.

On pose :

$$\mathrm{l}(\mathbf{z}) = \ln(\mathrm{L}(\mathbf{z})) = -\frac{\mathbf{z}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{z} + \mathbf{A}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}}{2} + \mathbf{A}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{z} + \frac{\mathbf{z}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{z} + \mathbf{A}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}}{2} + \mathbf{A}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{z}$$

Soit : $\mathrm{l}(\mathbf{z}) = 2\,\mathbf{A}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{z} = 2\ \begin{bmatrix}\mathrm{A} & 0\end{bmatrix}\cdot\dfrac{1}{\sigma^2 a^2}\begin{bmatrix}(1+a^2) & -1 \\ -1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}z_1 \\ z_2\end{bmatrix} = \dfrac{2A}{\sigma^2 a^2}\begin{bmatrix}(1+a^2) & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}z_1 \\ z_2\end{bmatrix}$

Soit : $\mathrm{l}(\mathbf{z}) = (1+a^2)z_1 - z_2$ ou $\mathrm{l}(\mathbf{z}) = z_1 - \dfrac{z_2}{1+a^2}$

2) Le rôle joué par z_2 peut-être étudié à partir de la probabilité de z_1 conditionnellement à z_2 et *s*, qui est caractérisée par :

$$\Pr\left(z_1/(z_2,s)\right)=\frac{\Pr\left((z_1,z_2)/s\right)}{\Pr\left(z_2\right)}=\frac{\frac{1}{2\pi\sqrt{a^2\sigma^4}}\cdot\exp\left(-\frac{(\mathbf{z}-\mathbf{s})^T\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{z}-\mathbf{s})}{2}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi\left(1+a^2\right)\sigma^2}}\cdot\exp\left(-\frac{z_2^2}{2\left(1+a^2\right)\sigma^2}\right)}$$

$$\Pr\left(z_1/(z_2,s)\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{a^2\sigma^2}{\left(1+a^2\right)}}}\cdot\exp\left(\frac{z_2^2}{2\left(1+a^2\right)\sigma^2}-\frac{\begin{bmatrix}z_1-s & z_2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}(1+a^2) & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}z_1-s\\ z_2\end{bmatrix}}{2a^2\sigma^2}\right)$$

$$\begin{bmatrix}z_1-s & z_2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}(1+a^2) & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}z_1-s\\ z_2\end{bmatrix}=(1+a^2)(z_1-s)^2-2z_2(z_1-s)+z_2^2$$

et

$$\frac{a^2z_2^2}{2a^2\left(1+a^2\right)\sigma^2}-\frac{(1+a^2)\left((1+a^2)(z_1-s)^2-2z_2(z_1-s)+z_2^2\right)}{2a^2\left(1+a^2\right)\sigma^2}$$

$$=\frac{(1+a^2)^2(z_1-s)^2-2(1+a^2)z_2(z_1-s)+z_2^2}{2a^2\left(1+a^2\right)\sigma^2}=\frac{\left((1+a^2)(z_1-s)-z_2\right)^2}{2a^2\left(1+a^2\right)\sigma^2}$$

soit

$$\Pr\left(z_1/(z_2,s)\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{a^2\sigma^2}{\left(1+a^2\right)}}}\cdot\exp\left(\frac{1+a^2}{2a^2\sigma^2}\left((z_1-s)-\frac{z_2}{1+a^2}\right)^2\right)$$

La variable z_1 conditionnellement à z_2 est une variable aléatoire Gaussienne de moyenne $s+\frac{z_2}{1+a^2}$ et de variance $\frac{a^2\sigma^2}{1+a^2}$, d'où la valeur de l'espérance conditionnelle $\mathrm{E}\{z_1/z_2\}=\frac{z_2}{1+a^2}$ qui représente l'information apportée par z_2 sur z_1.

La fonction de log-vraisemblance l(*z*) s'exprime en fonction de l'espérance conditionnelle par :

$$\mathrm{l}(z)=z_1-\mathrm{E}\{z_1/z_2\}$$

3) La probabilité d'erreur s'exprime par:

Pr(*Erreur*) = Pr(décider **A**, si $-\mathbf{A}$ émis) + Pr(décider $-\mathbf{A}$, si **A** émis)

= Pr(décider **A** / $-\mathbf{A}$ émis) Pr($-\mathbf{A}$) + Pr(décider $-\mathbf{A}$ / **A** émis) Pr(**A**)

$$= \Pr\left(\text{décider } \mathbf{A} \;/\; \mathbf{z} = -\mathbf{A} + \mathbf{n}\right) \cdot \Pr\left(-\mathbf{A}\right) + \Pr\left(\text{décider } -\mathbf{A} \;/\; \mathbf{z} = \mathbf{A} + \mathbf{n}\right) \cdot \Pr\left(\mathbf{A}\right)$$

$$= \Pr\left(\mathrm{l}(\mathbf{z}) > 0 \;/\; \mathbf{z} = -\mathbf{A} + \mathbf{n}\right) \cdot \Pr\left(-\mathbf{A}\right) + \Pr\left(\mathrm{l}(\mathbf{z}) < 0 \;/\; \mathbf{z} = \mathbf{A} + \mathbf{n}\right) \cdot \Pr\left(\mathbf{A}\right)$$

avec $\mathrm{l}(\mathbf{z}) = (1+a^2)z_1 - z_2$ qui est une variable aléatoire Gaussienne de moyenne $m = \mathrm{E}\{\mathrm{l}(\mathbf{z})\} = \pm(1+a^2)A$ et de variance $\sigma^2_{\mathrm{l}(\mathbf{z})} = a^2(1+a^2)\sigma^2$

La probabilité pour qu'une variable $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$ soit de signe opposé à m est $Q\left(\frac{m}{\sigma}\right)$

$$\text{d'où} \quad \mathrm{TEB} = Q\left(\frac{\left(1+a^2\right)A}{a\sqrt{1+a^2}\,\sigma}\right) = Q\left(\frac{A\sqrt{1+a^2}}{a\sigma}\right)$$

4) Si $a = 0$, l'observation de $z_2 = n_1$ permet d'enlever le bruit et la probabilité d'erreur est nulle.

Si $a >> 1$ alors $z_2 \approx a\, n_2$ n'observe que le bruit n_2 et n'apporte rien, la décision s'effectue uniquement à partir de z_1. La moyenne de z_1 est $m = A$ et sa variance est σ^2 donc la probabilité d'erreur est : $\mathrm{TEB} = \mathrm{Q}\left(\frac{A}{\sigma}\right)$.

5) Le test d'une moyenne dans un environnement Gaussien est une fonction linéaire de l'observation, donc nécessairement de la forme $\mathrm{l}(z) = z_1 + cz_2$ où c est une constante telle que l(z) soit de variance minimale.

$$\mathrm{E}\{\mathrm{l}(\mathbf{z})\} = \pm A \quad \text{et} \quad \sigma^2_{\mathrm{l}(\mathbf{z})} = \mathrm{E}\left\{n_1 + c(n_1 + an_2)^2\right\} = \left((1+c)^2 + (ac)^2\right)\sigma^2$$

Cette variance est minimale si $\dfrac{\partial\left(\left((1+c)^2 + (ac)^2\right)\sigma^2\right)}{\partial c} = 0$

Soit : $1 + c + a^2 c = 0$ d'où $c = \dfrac{-1}{1+a^2}$

$\mathrm{l}(\mathbf{z}) = z_1 - \dfrac{z_2}{1+a^2}$ qui est à un cœfficient près la fonction de vraisemblance déterminée à la question *1)*.

2.3 Seuils de détection optimaux

Soit la suite stationnaire bipolaire $\{a_k\}$ d'états successifs indépendants,

$a_k \in \{+1, 0, -1\}$ de probabilités respectives $p/2,\ 1-p,\ p/2$. (On fera varier p)

① On transmet la suite $\{a_k\}$ sous la forme NRZ :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_k\ g(t-kT), \qquad g(t) = V \cdot \Pi_T(t - \frac{T}{2}).$$

– Densité spectrale de puissance $S_x(f)$ de $x(t)$ d'après la formule de Bennett :

– $m_a = \mathrm{E}\{a_k\} = 0$ – $R_a(0) = \mathrm{E}\left\{|a_k|^2\right\} = p$ – $R_a(n) = 0$ (indépendance)

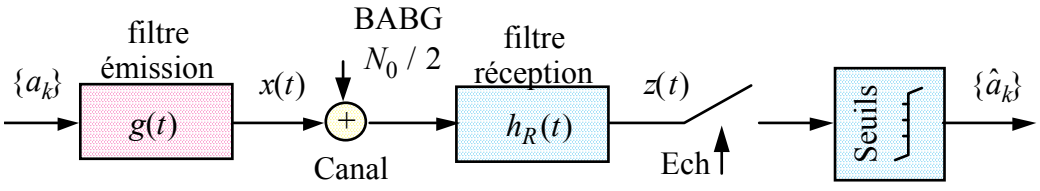
$$S_x(f) = V^2 T\, \mathrm{Sinc}^2(\pi f T) \cdot \{p\}$$

– Ce signal possède de la puissance aux basses fréquences.

– La moyenne étant nulle le spectre de ce signal ne comporte aucune raie.

– L'énergie émise par symbole est $E_s = R_a(0) \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2\, dt = V^2 T p$

② Le signal $x(t)$ traverse un canal sans distorsion à bruit additif blanc Gaussien centré de DSP bilatérale $N_0/2$. Il est en suite récupéré par un récepteur optimal classique où le filtre linéaire de réception $h_R(t)$ est le filtre adapté à un symbole. Suivant le schéma :



– Le filtre linéaire de réception adapté à un symbole est $h_R(t) = g^*(-t)$.

– Le signal reçu après ce filtre est $z(t) = \big(x(t) + n(t)\big) * h_R(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_k\ h(t-kT) + b(t)$

, où $h(t) = g(t) * h_R(t) = g(t) * g^*(-t)$

soit $h(t) = V \cdot \Pi_T(t - \frac{T}{2}) * V \cdot \Pi_T(-t - \frac{T}{2}) = V^2 T \cdot \Lambda_{2T}(t)$.

– Le critère de Nyquist est respecté par le filtre h. Il n'y a pas d'interférence entre symboles.

En effet pour $k \neq 0$, $h(kT) = 0$.

– Le bruit blanc Gaussien centré $n(t)$ donne après filtrage par $h_R(t)$ un bruit $b(t)$ Gaussien, centré, de puissance :

$$P_b = \int_{-\infty}^{+\infty} S_b(f)df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |h_R(f)|^2 \, df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |h_R(t)|^2 \, dt = \frac{N_0}{2} V^2 T$$

③ Le signal $z(t)$ est échantillonné aux instants $t = kT + \theta$ de telle sorte que

$$z_k = a_k h(0) + \beta .$$

– $h(t) = V^2 T \cdot \Lambda_{2T}(t)$ et $h(0) = V^2 T$.

– La variable aléatoire β est un échantillon du bruit stationnaire $b(t)$, c'est donc une V.A. Gaussienne , centrée $m_\beta = 0$ et de variance $\sigma_\beta^2 = P_b = \frac{N_0}{2} V^2 T$.

– La variable aléatoire $z_k = a_k h(0) + \beta$ conditionnellement à la donnée de $a_k = \alpha_i$, $\alpha_i \in \{+1, 0, -1\}$, est une variable Gaussienne de variance σ_β^2 et centrée sur $m_z = \alpha_i h(0)$.

④ Pour décider des symboles $\hat{a}_k$ reçus le signal z_k est comparé à deux seuils (s_1, s_2).

On prendra : $s_1 = h(0) \cdot s_+$ et $s_2 = h(0) \cdot s_-$

La règle de décision étant :
$$\begin{cases} z_k > s_1 \rightarrow \hat{a}_k = +1 \\ z_k \in [s_2, s_1] \rightarrow \hat{a}_k = 0 \\ z_k < s_2 \rightarrow \hat{a}_k = -1 \end{cases}$$

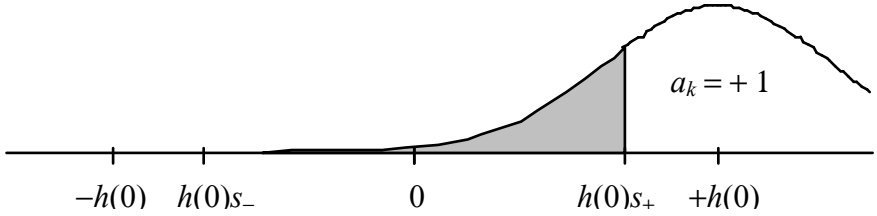
– Probabilité d'erreur de décision sur les symboles a_k :

$$\Pr(Errs) = \Pr(Err \ / \ a_k = +1) \cdot \Pr(a_k = +1) + \Pr(Err \ / \ a_k = 0) \cdot \Pr(a_k = 0) + \Pr(Err \ / \ a_k = -1) \cdot \Pr(a_k = -1)$$

$$\Pr(Err \ / \ a_k = +1) = \Pr(z_k < s_1 \ / \ a_k = +1)$$

$\Pr(Err \ / \ a_k = 0) = \Pr(z_k > s_1 \ / \ a_k = 0) + \Pr(z_k < s_2 \ / \ a_k = 0)$, *événements incompatibles.*

$$\Pr(Err \ / \ a_k = -1) = \Pr(z_k > s_2 \ / \ a_k = -1)$$



$$\Pr(Err \ / \ a_k = +1) = \Pr(z_k < s_1 \ / \ a_k = +1) = \Pr(+h(0) + \beta < h(0)s_+) = \Pr(\beta < h(0)(s_+ - 1))$$
$$= 1 - \Pr(\beta > h(0)(s_+ - 1)) = \Pr(\beta > h(0)(1 - s_+))$$

$$\Pr(Err \ / \ a_k = +1) = \int_{h(0)(1-s_+)}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_\beta \sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(\beta - m_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2}} \, d\beta$$

$$\Pr(Err \ / \ a_k = +1) = \frac{1}{2}\mathrm{Erfc}\left(\frac{h(0)(1-s_+)}{\sigma_\beta\sqrt{2}}\right) = Q\left(\frac{h(0)(1-s_+)}{\sigma_\beta}\right)$$

$$\Pr(Err \ / \ a_k = 0) = \Pr(z_k > s_1 / a_k = 0) + \Pr(z_k < s_2 / a_k = 0) = Q\left(\frac{h(0)s_+}{\sigma_\beta}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{Erf}\left(\frac{h(0)s_-}{\sigma_\beta}\right)$$

$$\Pr(Err \ / \ a_k = -1) = \Pr(z_k > s_2 / a_k = -1) = \frac{1}{2}\mathrm{Erfc}\left(\frac{h(0)(1+s_+)}{\sigma_\beta\sqrt{2}}\right) = Q\left(\frac{h(0)(1+s_+)}{\sigma_\beta}\right)$$

– Avec $E_s = V^2 T \frac{p}{2}$, $\sigma_\beta^2 = P_b \frac{N_0}{2} V^2 T$, $h(0) = V^2 T$, il vient $\frac{h(0)}{\sigma_\beta^2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2E_s}{pN_0}}$

$$\Pr(Errs) = \frac{p}{4}\left(\mathrm{Erfc}\left(\sqrt{\frac{2E_s}{pN_0}}(1-s_+)\right) + \mathrm{Erfc}\left(\sqrt{\frac{2E_s}{pN_0}}(1+s_-)\right)\right)$$
$$+ \frac{1-p}{2}\left(\mathrm{Erfc}\left(\sqrt{\frac{2E_s}{pN_0}}(s_+)\right) + \mathrm{Erf}\left(\sqrt{\frac{2E_s}{pN_0}}(s_-)\right)\right)$$

– Dans le cas $s = s_+ = -s_-$, et comme $\mathrm{Erfc}(x) = 2 - \mathrm{Erfc}(-x) = \mathrm{Erf}(-x)$

$$\Pr(Errs) = \frac{p}{2}\mathrm{Erfc}\left(\sqrt{\frac{2E_s}{pN_0}}(1-s)\right) + (1-p)\mathrm{Erfc}\left(\sqrt{\frac{2E_s}{pN_0}}(s)\right)$$

– Calcul, en fonction de *p*, du seuil $s = s_+ = -s_-$ qui minimise la probabilité d'erreur.

On veut minimiser $\Pr(Errs)$ fonction de s. Pour cela il suffit d'annuler sa dérivée par rapport à s et de vérifier qu'on est bien sur le plus petit extremum.

L'on a $\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Erfc}\left(\frac{x-b}{a}\right)=\frac{2}{a\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\left(\frac{x-b}{a}\right)^2}$, ce qui donne avec $a=\sqrt{\frac{pN_0}{2E_s}}$:

$$\frac{\partial}{\partial s}\Pr(Errs)=-\frac{p}{2}\frac{2}{a\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(s-1)^2}{a^2}}+(1-p)\frac{2}{a\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{s^2}{a^2}}=0.$$

en prenant le logarithme : $\ln\left(\frac{p}{2}\right)-\frac{(s-1)^2}{a^2}=\ln(1-p)-\frac{s^2}{a^2}$

soit : $a^2\ln\left(\frac{p}{2(1-p)}\right)=1-2s \quad\Rightarrow\quad s=\frac{1}{2}+\frac{pN_0}{4E_s}\ln\left(\frac{p}{2(1-p)}\right)$

Lorsque les ±1 sont plus probables, $\frac{p}{2}>1-p \quad\Rightarrow\quad s<\frac{1}{2}$, le seuil se rapproche de l'état 0.

Lorsque le zéro est plus probable, $\frac{p}{2}<1-p \quad\Rightarrow\quad s>\frac{1}{2}$, le seuil se rapproche des états ±1.

Lorsque les états sont équiprobables, $p=\frac{2}{3} \quad\Rightarrow\quad s=\frac{1}{2}$, le seuil est au milieu des états.

D'autre part si le bruit augmente, l'on constate que le seuil s évolue du coté de l'état le moins probable, c'est-à-dire que l'on favorise encore la détection de l'état le plus probable.

– Dans le cas équiprobable $p=\frac{2}{3}$ et $s=\frac{1}{2}$: $\Pr(Errs)=\frac{2}{3}\mathrm{Erfc}\left(\sqrt{\frac{3E_s}{8N_0}}\right)$

2.4 Réception optimale en optique cohérente

① Une loi de Poisson de paramètre λ est définie par: $\mathrm{P}(n,\lambda)=\dfrac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$

② La moyenne est définie par :

$$\mathrm{E}\{n\}=\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot \mathrm{P}(n)=\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}=\lambda\, e^{-\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}=\lambda$$

De même :

$$\mathrm{E}\{n^2\}=\mathrm{E}\{n(n-1)+n\}=\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\cdot\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}+\lambda=\lambda^2\, e^{-\lambda}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!}+\lambda=\lambda^2+\lambda$$

Soit : $\mathrm{Var}\{n\}=\mathrm{E}\{n^2\}-\mathrm{E}^2\{n\}=\lambda$

③ Le rapport "signal sur bruit" est défini par : $\dfrac{S}{B}=\dfrac{\mathrm{E}^2\{n\}}{\mathrm{Var}\{n\}}=\dfrac{\lambda^2}{\lambda}=\lambda$

④ Le critère de maximum de probabilité a posteriori s'exprime par :

$$\ln(n)=\frac{\Pr(\lambda_1/n)}{\Pr(\lambda_0/n)}=\frac{\Pr(n/\lambda_1)\cdot P_1}{\Pr(n/\lambda_0)\cdot P_0}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1. \qquad \text{Soit pour } \lambda_1>\lambda_0 : \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^n \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P_0}{P_1}\mathrm{e}^{(\lambda_1-\lambda_0)}$$

En prenant le logarithme népérien : $n \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \dfrac{\lambda_1-\lambda_0-\ln P_1+\ln P_0}{\ln\lambda_1-\ln\lambda_0}=S$

n représente le nombre de photons observés et S est le seuil de décision. S dépend des paramètres du système λ_1 et λ_0 et des probabilités a priori P_0 et P_1 des hypothèses H_0 et H_1.

Même pour un problème apparemment simple, il n'était pas évident de deviner la valeur du seuil de décision S.

La probabilité d'erreur s'exprime par :

$$\Pr(Err)=\sum_{n>S}\Pr(n/\lambda_0)\cdot P_0+\sum_{n<S}\Pr(n/\lambda_1)\cdot P_1$$

$$\Pr(Err) = \sum_{n>S} \Pr(n/\lambda_0)\cdot P_0 + P_1 \cdot \left(1 - \sum_{n>S} \Pr(n/\lambda_1)\right) = P_1 + \sum_{n>S} \left(\Pr(n/\lambda_0)\cdot P_0 - \Pr(n/\lambda_1)\cdot P_1\right)$$

Si lorsque $n > S$ on a : $\left(\Pr(n/\lambda_0)\cdot P_0 - \Pr(n/\lambda_1)\cdot P_1\right) < 0$,

et si pour $n < S$ on a : $\left(\Pr(n/\lambda_0)\cdot P_0 - \Pr(n/\lambda_1)\cdot P_1\right) > 0$,

alors S est la valeur qui minimise la probabilité d'erreur.

Ce critère s'exprime aussi par : $$\mathrm{L}(n) = \frac{\Pr(n/\lambda_1)}{\Pr(n/\lambda_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P_0}{P_1}$$

Le récepteur à Probabilité d'erreur minimale est aussi un récepteur à maximum de probabilité à posteriori (MAP)

⑤ Le critère de Maximum de vraisemblance (MV) est défini par:

$$\mathrm{L}(n) = \frac{\Pr(n/\lambda_1)}{\Pr(n/\lambda_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1$$

Les deux critères (MAP et MV) sont identiques si les probabilités a priori sont égales (ceci est vérifié en communications numériques pour des formes équiréparties, en particulier pour une suite i.i.d)

$$n \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\ln\lambda_1 - \ln\lambda_0} = S$$

La probabilité d'erreur s'exprime par : (Ent(S) est la partie entière de S)

$$\Pr(Err) = \Pr(Err/H_0)\cdot P_0 + \Pr(Err/H_1)\cdot P_1 = \frac{1}{2}\left(\Pr(Err/H_0) + \Pr(Err/H_1)\right)$$

$$\Pr\{Err/H_0\} = \sum_{n=\mathrm{Ent}(S)+1}^{\infty} \frac{\lambda_0^n\, \mathrm{e}^{-\lambda_0}}{n!} \quad \text{et} \quad \Pr\{Err/H_1\} = \sum_{n=0}^{\mathrm{Ent}(S)} \frac{\lambda_1^n\, \mathrm{e}^{-\lambda_1}}{n!}$$

⑥ Si $\lambda_0 = 0$ alors $s = 0$

$\Pr\{Err/H_0\} = 0$ et $\Pr\{Err/H_1\} = \mathrm{e}^{-\lambda_1}$ soit : $\Pr\{Err\} = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\lambda_1}$.

Pour une probabilité d'erreur de 10^{-9} sur la transmission d'un "1",

$\lambda_1 = \ln(10^9) - \ln(2) \approx 20$

Le nombre moyen de photons par bit transmis est de : $\frac{20}{2} = 10$.

⑦ Pour une longueur d'onde de 1,5 μm et un indice de 1,5, la fréquence des photons est de :

$$\nu = \frac{c/\eta}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8 / 1{,}5}{1{,}5 \cdot 10^{-6}} = 1{,}33 \cdot 10^{14}\,\text{Hz}$$

Soit une énergie par photon de :

$E_{phot} = h\nu = 6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 1{,}33 \cdot 10^{14} \approx 8{,}8 \cdot 10^{-20}$ Joule

Pour un débit binaire de 10^9 bit/s, la puissance moyenne reçue est de :

$P_r = 10^9 \cdot 10 \cdot 8{,}8 \cdot 10^{-20} = 8{,}8 \cdot 10^{-10}$ Watt

Si la puissance émise dans la fibre est de 1 mW, l'atténuation apportée par la fibre optique est au maximum de :

$$10 \cdot \log_{10}\left(\frac{P_e}{P_r}\right) = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{1}{8{,}8} \cdot 10^7\right) = 60{,}55\,\text{dB}.$$

Avec une fibre optique monomode de cœfficient d'affaiblissement linéique de 0,1 dB/km, la distance maximale entre deux répéteurs est de : 600 km.

⑧ Les performances actuelles des récepteurs sont loin du critère de comptage de photons. Il faut considérer une perte d'environ 20 dB (1000 photons par bit en moyenne). Soit une distance maximale entre répéteurs de 400 km. On voit la possibilité de réaliser des liaisons interurbaines ou sous-marines sans répéteur régénérateur.

2.5 Modulation MAQ 8

On pose : $d_k = d_{pk} + jd_{qk}$. $\{d_k\}$ est une suite i.i.d.

1) L'équivalent bande de base du signal modulé MAQ-8 est : $s(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} d_k \cdot g(t-kT)$

Le signal passe bande MAQ-8 est défini par : $x(t) = \mathrm{Re}\left\{ s(t) \cdot \sqrt{2} \cdot \mathrm{e}^{+j2\pi f_c t} \right\}$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} d_{pk} \cdot g(t-kT) \cdot \sqrt{2}\cos(2\pi f_c t) - \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} d_{qk} \cdot g(t-kT) \cdot \sqrt{2}\sin(2\pi f_c t)$$

2) La DSP en équivalent en bande de base est définie par : $S_s(f) = \frac{|G(f)|^2}{T} \cdot \left(\mathrm{E}\left\{ |d_k|^2 \right\} \right)$

La DSP du signal réel passe bande est définie par : $S_x(f) = \frac{1}{2} \cdot \{ S_s(f-f_c) + S_s(-f-f_c) \}$

3) La fonction $g(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi_T(t)$ est normée, donc l'énergie moyenne par symbole du signal réel passe bande est : $E_s(x) = T_s \cdot P_x = E_s(s) = \mathrm{E}\left\{ |d_k|^2 \right\} = \frac{A^2 + B^2}{2}$

L'énergie moyenne par élément binaire du signal réel est :

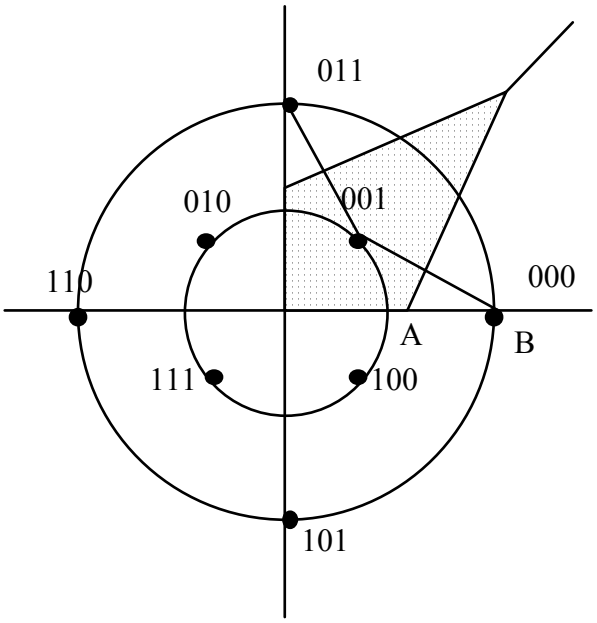
$$E_b = E_s \cdot \frac{D_s}{D_b} = \frac{E_s}{\log_2 M} = \frac{E_s}{3} = \frac{A^2 + B^2}{6}$$

5) La distance minimale entre les signaux est le minimum de la distance entre les points de la constellation sur le cercle intérieur et entre deux points des cercles intérieurs et extérieurs. (La distance entre les signaux réels est égale à celle sur l'équivalent en bande de base).

$$d^2_{\min}(s) = \min\left\{ d^2\left(Ae^{j\pi/4}, Ae^{-j\pi/4} \right), d^2\left(B, Ae^{j\pi/4} \right) \right\} = \min\left\{ 2A^2, \left(B - A/\sqrt{2} \right)^2 + A^2/2 \right\}$$

$$d^2_{\min}(x) = \min\left\{ 2A^2, B^2 + A^2 - \sqrt{2}AB \right\}$$

4) Constellation MAQ-8 ("Optimale") et affectations binaires :



6) La distance min est maximale lorsque les deux termes sont égaux, sous la contrainte :

$$A^2 + B^2 = 6E_b = cste$$

Soit $B^2 + A^2 - \sqrt{2}AB = 2A^2$

Soit $\lambda^2 - \sqrt{2}\lambda - 1 = 0$ en posant : $\lambda = B/A$ $\quad (A^2(1+\lambda^2) = 6 \cdot E_b)$

La solution est : $\lambda = \dfrac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2+4}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \rightarrow \lambda = 1,93$

La distance est alors : $\max\left\{d^2_{\min}(x)\right\} = 2A^2 = \dfrac{12 \cdot E_b}{1+\lambda^2} = 2,4 \cdot E_b$

7) L'observation **z** est un vecteur à deux dimensions correspondant à l'échantillonnage des composantes en phase et quadrature après le filtrage (adapté) de réception. Sous la condition que $f_c \cdot T >> 1$, les modulations MAQ et MDP sont bi-orthogonales ce qui permet de déduire les récepteurs optimaux sur chacune des composantes. On en déduit aussi que si le canal est à BABG les composantes de bruit sont indépendantes.

Il est bien évident que les M signaux, possibles à l'émission, ne sont pas orthogonaux lorsqu'ils sont projetés sur cet espace de dimension 2.

Les zones de décision ont été définies à la question 4, la probabilité d'erreur est :

$$\Pr\{Err_{symb}\} = \sum_{i=1}^{M} \Pr\{\mathbf{z} \notin Z_i / H_i\} \cdot \Pr\{H_i\} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} \Pr\{\mathbf{z} \notin Z_i / H_i\}$$

La probabilité que l'observation $\mathbf{z}$ n'appartienne pas à la zone Z_i de décision de l'hypothèse H_i lorsque celle-ci est émise peut être majorée (borne de l'union) par la somme des probabilités d'erreur de détection des hypothèses prise deux à deux (cas binaire).

$$\Pr\{\mathbf{z} \notin Z_i / H_i\} = \Pr\left\{\mathbf{z} \in \bigcup_{j \neq i} Z_i / H_i\right\} = \Pr\left\{\mathbf{z} \in \bigcup_{j \neq i} Z_{i,j} / H_i\right\} \leq \sum_{j \neq i} \Pr\{\mathbf{z} \in Z_{i,j} / H_i\}$$

Les zones $Z_{i,j}$ de détection à deux hypothèses sont des demi-plans séparés par les médiatrices des segments joignant les deux points considérés de la constellation.

Si le rapport signal sur bruit ($d^2 / 2N_0$) n'est pas trop faible on peut considérer que les erreurs sur les points éloignés ($d^2 > d_{\min}^2$) sont négligeables et faire l'approximation :

$$\Pr\{\mathbf{z} \notin Z_i / H_i\} \approx \sum_{\substack{j \text{ tel que} \\ \text{proches} \\ \text{voisins}}} \Pr\{\mathbf{z} \in Z_{i,j} / H_i\}$$

Les quatre points de la couronne intérieure ont quatre voisins à la distance minimale, ceux de la couronne extérieure en ont deux. On a donc :

$$\Pr\{Err_{symb}\} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} \Pr\{\mathbf{z} \notin Z_i / H_i\} = \frac{1}{8}(4 \cdot 4 + 4 \cdot 2) \cdot Q\left(\sqrt{\frac{d_{\min}^2}{2N_0}}\right) = 3 \cdot Q\left(\sqrt{\frac{d_{\min}^2}{2N_0}}\right)$$

Pour déterminer la probabilité d'erreur par bit on considère le nombre de bits faux apportés par un symbole erroné. Les points de la couronne intérieure ont quatre voisins à la distance minimale dont deux à une distance de Hamming de 2 et deux à 1. Ceux de la couronne extérieure en ont deux à une distance de Hamming de 1. On a en moyenne 1.25 eb faux sur 3.

$$\Pr\{Err_{bit}\} \approx \frac{1,25}{3} \cdot 3 \cdot Q\left(\sqrt{\frac{d_{\min}^2}{2N_0}}\right) = 1,25 \cdot Q\left(\sqrt{1,2 \cdot \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

8) Pour une MAQ-4, MDP-2 ou PAM-2 on a

$$d_{\min}^2 = 4 \cdot E_b \quad \text{et} \quad \Pr\{Err_{bit}\} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right).$$

Pour obtenir avec la MAQ-8 (au facteur 1,25 près) la même probabilité d'erreur par bit que la MAQ-4, on doit augmenter le rapport E_b / N_0 de : $-10 \cdot \log_{10}(1,2/2) \approx 2,22$ dB .

Pour une MDP-8 de même valence et avec la même impulsion normalisée $g(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi_T(t)$,

on a : $E_b = \mathrm{C}^2 / \log_2 8 = \mathrm{C}^2 / 3$ et $d_{\min}^2 = 4 \cdot \mathrm{C}^2 \sin^2(\pi/8) = 12 \cdot E_b \cdot \sin^2(\pi/8)$

Soit sur le signal réel $x(t)$: $d_{\min}^2 = 12 \cdot E_b \cdot \sin^2(\pi/8) \approx 1,76 \cdot E_b$

Chaque point de la constellation a deux plus proches voisins à une distance de Hamming de 1 (codage de Gray), la probabilité d'erreur est :

$$\Pr\{Err_{bit}\} = \frac{1}{8}\left(8 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3}\right) \cdot Q\left(\sqrt{\frac{6 \cdot E_b \cdot \sin^2(\pi/8)}{N_0}}\right) \approx \frac{2}{3} \cdot Q\left(\sqrt{0,88 \cdot \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Aux facteurs 1,25 et 2/3 près (approximation valable si $E_b / N_0 > 10$), pour obtenir avec la MDP-8 la même probabilité d'erreur par bit que la MAQ-8, on doit augmenter le rapport E_b / N_0 de :

$$10 \cdot \log_{10}(1,2/0,88) \approx 1,35 \text{ dB} .$$

Le gain en performance de 1,35 dB de la MAQ-8 par rapport à la MDP-8 est obtenu au détriment de la propriété d'enveloppe constante de la MDP.

2.6 Réponse partielle

1) La densité spectrale du signal émis est donnée par l'application de la formule de Bennett soit:

$$S_x(f) = \frac{\mathrm{E}\{a_k^2\}}{T} |H(f)|^2 = \begin{cases} \frac{A \cos \pi T f}{T} & \frac{-1}{2T} < f < \frac{1}{2T} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

2) La puissance du signal x(t) est l'intégrale de sa densité spectrale soit:

$$P_x = \frac{1}{T}\int_{\frac{-1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} A\cos(\pi Tf)\,df = \frac{A}{\pi T^2}\left[\sin \pi Tf\right]_{\frac{-1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} = \frac{2A}{\pi T^2}$$

Si $D_b = \frac{1}{T}$ est le débit binaire; l'énergie par bit émise est $E_b = \frac{P_x}{D_b} = P_X\ T = \frac{2A}{\pi T}$

3) Le filtre optimal de réception, pour la transmission d'un symbole, est le filtre adapté de réponse impulsionnelle $h_r(t) = h(-t)$.

4) Le filtre global de transmission à pour réponse impulsionnelle :

$$p(t) = h(t) * h_r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)h(-(t-\xi))d\xi = R_h(t)$$

$p(t)$ a pour transformée de Fourier :

$$P(f) = |H(f)|^2 = \begin{cases} \dfrac{A\cos \pi Tf}{T} & \dfrac{-1}{2T} < f < \dfrac{1}{2T} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

soit : $p(t) = \frac{1}{T}\frac{\sin \pi t/T}{\pi t/T} * \frac{A}{2}\left(\delta\left(t-\frac{T}{2}\right)+\delta\left(t+\frac{T}{2}\right)\right)$

$$p(t) = \frac{A}{2T}\left(\frac{\sin \pi(t-T/2)/T}{\pi(t-T/2)/T} + \frac{\sin \pi(t+T/2)/T}{\pi(t+T/2)/T}\right)$$

Le signal à la sortie du filtre de réception est $z(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m p(t-mT) + n(t)$

où $n(t)$ est une variable aléatoire gaussienne centrée, de variance

$$\sigma^2 = \frac{N_o}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} |H_r(f)|^2 df = \frac{N_o A}{\pi T}$$

5) Choix de l'instant d'échantillonnage.

5a) Aux instants kT :

$$z(kT) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m p\left((k-m)T\right) + n(kT)$$

$$= \frac{A}{2T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \left(\frac{\sin \pi(k-m-1/2)}{\pi(k-m-1/2)} + \frac{\sin \pi(k-m+1/2)}{\pi(k-m+1/2)}\right) + n(kT)$$

$$= \frac{A}{2\pi T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m (1)^{k-m} \left(\frac{-1}{k-m-1/2} + \frac{1}{k-m+1/2} \right) + n(kT)$$

$$= \frac{A}{2\pi T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m (1)^{k-m-1} \left(\frac{1}{(k-m)^2 - 1/4} \right) + n(kT)$$

L'interférence entre les symboles est de durée infinie.

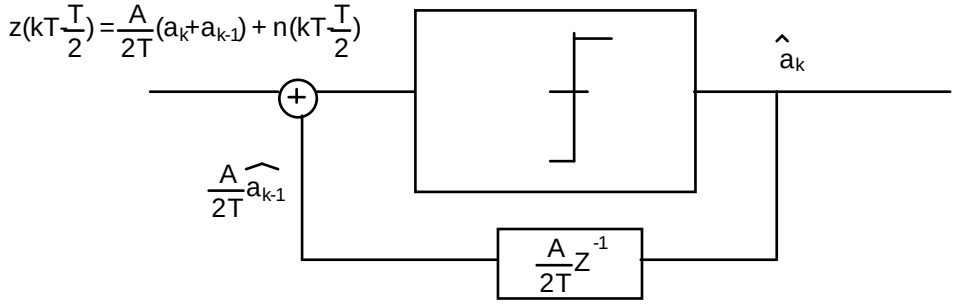
5b) Aux instants $kT - T/2$:

$$z\left(kT - \frac{T}{2}\right) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m p\left((k-m-1/2)T\right) + n\left(kT - \frac{T}{2}\right)$$

$$z\left(kT - \frac{T}{2}\right) = \frac{A}{2T}\left(a_k + a_{k-1}\right) + n\left(kT - \frac{T}{2}\right)$$

L'interférence entre les symboles est contrôlée sur deux symboles.

6) Le récepteur à retour de décision utilise le schéma suivant :



Récepteur à retour de décisions :

L'entrée du comparateur à seuil est : $e(kT-T/2) = z(kT-T/2) - \frac{A}{2T}\hat{a}_{k-1}$ soit :

$$e\left(kT - T/2\right) = \frac{A}{2T} \cdot \left(a_k + a_{k-1} - \hat{a}_{k-1}\right) + n\left(kT - T/2\right) = \frac{A}{2T} \cdot \left(a_k + \varepsilon_{k-1}\right) + n\left(kT - T/2\right)$$

Si la décision précédente est correcte; $\varepsilon_{k-1}=0$ et $\hat{a}_{k-1} = a_{k-1}$ soit :

$$e(kT-T/2) = \frac{A}{2T} a_k + n(kT-T/2)$$

Sous cette hypothèse; la probabilité d'erreur est égale à la probabilité pour qu'une variable aléatoire Gaussienne de variance σ^2 soit inférieure à $-\frac{A}{2T}$ soit:

$p = \text{Prob}(\varepsilon|\ \hat{a}_{k-1} = a_{k-1}) = \text{Prob}(n(kT-T/2) < -\frac{A}{2T}) = Q\left(\frac{A}{2T\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{\pi A}{4N_oT}}\right)$

Si la décision précédente est erronée; $\varepsilon_{k-1}=\pm 2$ et $\hat{a}_{k-1} \neq a_{k-1}$ soit :

$\text{Prob}(\varepsilon|\ \hat{a}_{k-1} \neq a_{k-1}) = \text{Prob}(\varepsilon|\ \varepsilon_{k-1} = \pm 2)$

si a_k et (ε_{k-1}) sont du même signe; ;($a_k + \varepsilon_{k-1}$) $= \pm 3$

$\text{Prob}(n(kT-T/2) < -\frac{3A}{2T}) << \text{Prob}(n(kT-T/2) < -\frac{A}{2T}) = p$

si a_k et (ε_{k-1}) sont de signes contraires; ;($a_k + \varepsilon_{k-1}$) $= -a_k$

$\text{Prob}(\varepsilon \mid\ ;(a_k + \varepsilon_{k-1}) = -a_k) = 1-p \approx 1$

Les deux événements précédents sont de probabilité 1/2. d'où :

$\text{Prob}(\varepsilon_\kappa = \pm 2 \mid \varepsilon_{k-1} = \pm 2) \approx 1/2$

$p' = \text{Prob}(\varepsilon_k = \pm 2)$ telle que: $p' = \frac{p'}{2} + p(1-p')$

Soit : $p' = \frac{2p}{1+2p} \approx 2\ p$

Le retour de décisions double approximativement le taux d'erreurs.

7) Le codage différentiel $a'_k = a'_{k-1}\ a_k$ permet de relier les valeurs moyennes prises par z(kT-T/2) et les symboles a_k.

$$a_k = 1 \Rightarrow z(kT-T/2) = \pm \frac{A}{T} + n(kT-T/2)$$

$$a_k = -1 \Rightarrow z(kT-T/2) = n(kT-T/2)$$

Pour discriminer entre trois valeurs moyennes; on place deux seuils équidistants des points à discriminer. Soit $S_+ = \frac{A}{2T}$ et $S_- = -\frac{A}{2T}$.

Le calcul de la probabilité d'erreur se fait conditionnellement aux deux hypothèses $a_k=1$ et $a_k=-1$.

$$\text{Prob}(\varepsilon_\kappa = 1 | a_k = 1) = \frac{1}{2}\text{Prob}(\varepsilon_\kappa = 1 |\ a_k = 1\ ;\ a'_{k-1} = -1) + \frac{1}{2}\text{Prob}(\varepsilon_\kappa = 1 |\ a_k = 1\ ;\ a'_{k-1} = 1)$$

$$\text{Prob}(\varepsilon_\kappa=1|a_k=1) = \frac{1}{2}\text{Prob}(n(kT-T/2) > \frac{A}{2T}) + \frac{1}{2}\text{Prob}(n(kT-T/2) < -\frac{A}{2T})$$

$$\text{Prob}(\varepsilon_\kappa=1|a_k=1) = \text{Prob}(n(kT-T/2) > \frac{A}{2T})$$

D'où :

$$\text{Prob}(\varepsilon_\kappa=1|a_k=1) = \text{Prob}(n(kT-T/2) > \frac{A}{2T}) = Q\left(\sqrt{\frac{\pi A}{4N_oT}}\right)$$

$$\text{Prob}(\varepsilon_\kappa=1|a_k=-1) = 1 - \text{Prob}(-\frac{A}{2T} < n(kT-T/2) < \frac{A}{2T}) = 2.Q\left(\sqrt{\frac{\pi A}{4N_oT}}\right)$$

La probabilité d'erreur moyenne par bit est

$$\text{Prob}(\varepsilon_\kappa=1) = \frac{3}{2}Q\left(\sqrt{\frac{\pi A}{4N_oT}}\right)$$

Pour une modulation antipodale binaire la probabilité d'erreur est :

$$\text{Prob}(\varepsilon_\kappa=1) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_o}}\right)$$

En modulation à réponse partielle; l'énergie par bit moyenne est :

$$E_b = \frac{2A}{\pi T}$$

La probabilité d'erreur peut s'écrire sous la forme :

$$\text{Prob}(\varepsilon_\kappa=1) = K\ Q\left(\sqrt{\alpha\frac{2E_b}{N_o}}\right)$$

α est défini par :

$$\frac{A\pi}{4N_oT} = \alpha\ \frac{2E_b}{N_o} = \alpha\ \frac{4A}{N_o\pi T}$$

soit : $\alpha = \frac{\pi^2}{16}$

Exprimé en Décibels : $\alpha = 2{,}1$ dB.