3 Critère De Nyquist

3.1 Filtre adapté

1) On considère un récepteur composé d'un filtre linéaire suivi d'un échantillonneur à l'instant τ.

$$y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} z(\tau - t)h(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} (\pm s(\tau - t) + b(\tau - t))h(t)dt = \pm r(\tau) + n(\tau)$$

Le rapport signal sur bruit est: $\rho = \dfrac{|r(\tau)|^2}{E\{|n(\tau)|^2\}}$

Le numérateur représente le carré de la contribution du signal émis, le dénominateur la variance du bruit apporté par le canal de transmission.

$$|r(\tau)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} s(t-\tau) \cdot h_r(t)\, dt \right|^2$$

L'inégalité de Cauchy Schwartz permet de majorer le numérateur:

$$|r(\tau)|^2 \le \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t-\tau)|^2\, dt \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |h_r(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|S(-f)e^{2i\pi f\tau}\right|^2 df \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |H_r(f)|^2\, df$$

L'égalité est vérifiée si les deux fonctions $h_r(t)$ et $s^*(\tau - t)$ sont proportionnelles:

$h_r(t) = \lambda\ s^*(\tau - t)$ équivalent à $H_r(f) = \lambda\ S^*(f)\ e^{-2j\pi f\tau}$ $\quad \lambda \in C$

$$E\{|n(\tau)|^2\} = E\{\left| \int_{-\infty}^{\infty} b(\tau - t)\, h(t)\, dt \right|^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f\, df = \int_{-\infty}^{\infty} S_b(f\, |\, H_r(f = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |\, H_r(f\, |^2\, df$$

$$E\{|n(\tau)|^2\} = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |\, h_r(t\, |^2\, df$$

Le rapport signal sur bruit ρ est majoré par :

$$\rho = \frac{|r(\tau)|^2}{E\{|n(\tau)|^2\}} \le$$

2) La fonction de transfert globale qui maximise ρ, est caractérisée par :

$r(t) = s(t) * h_r(t)$ qui a pour transformée de Fourier

$$R(f) = S(f) \cdot H_r(f) = \left|S(f)\right|^2 \mathrm{e}^{-j2\pi f\tau}$$

$r(t)$ est une fonction réelle paire par rapport à $t = \tau$, l'instant d'échantillonnage.

3) La densité spectrale du bruit est $S_b(f) \geq 0$ alors:

$$\mathrm{E}\left\{n^2(\tau)\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_n(f)df = \int_{-\infty}^{+\infty} S_b(f)\left|H_r(f)\right|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\sqrt{S_b(f)}H_r(f)\right|^2 df$$

$$r^2(\tau) = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} S(f)H_r(f)\mathrm{e}^{j2\pi f\tau}df\right|^2 = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S(f)}{\sqrt{S_b(f)}}\sqrt{S_b(f)}H_r(f)\mathrm{e}^{j2\pi f\tau}df\right|^2$$

$$r^2(\tau) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{S(f)}{\sqrt{S_b(f)}}\right|^2 df \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\sqrt{S_b(f)}H_r(f)\right|^2 df$$

Légalité est vérifiée pour : $\dfrac{S(f)}{\sqrt{S_b(f)}} = \lambda\sqrt{S_b(f)}H_r(f)$

Soit l'expression du filtre optimal de réception en présence de bruit non Blanc :

$$H_r(f) = \lambda\frac{S(f)}{S_b(f)}$$

Ce filtre optimal existe si et seulement si $S_b(f) \geq 0$ presque partout.

Si il existe un segment Δf de mesure non nulle tel $S_b(f) = 0$ et $S(f) \neq 0$ pour $f \in \Delta f$, alors le rapport signal sur bruit ρ est infini .

C'est un cas de détection singulière.

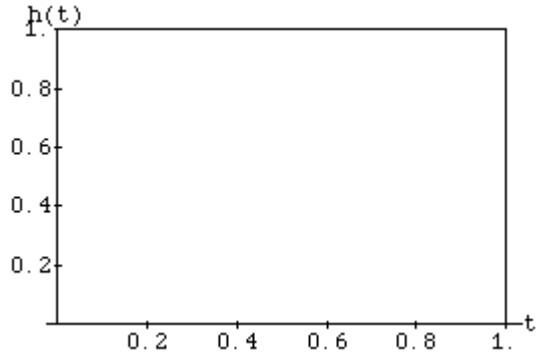
4) On peut interpréter le filtre de réception comme la mise en cascade d'un filtre blanchissant et d'un filtre adapté en bruit blanc:

$$H_r(f) = \frac{1}{\sqrt{S_b(f)}} \cdot \frac{S(f)}{\sqrt{S_b(f)}}$$

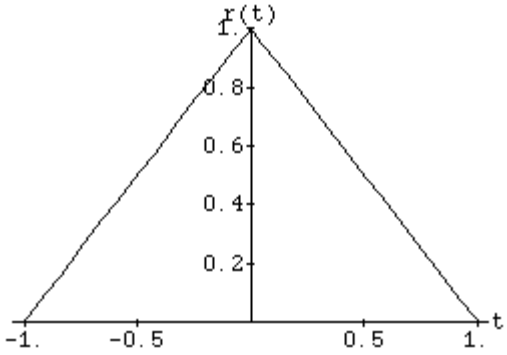
5) Le filtre adapté ($\tau = 0$) à une impulsion rectangulaire, de durée *T*, est la même impulsion rectangulaire et $r(t)$ est un triangle de durée 2*T*.

Le filtre adapté à une impulsion sinusoïdale est la même impulsion et $r(t)$ est une sinusoïde de même fréquence et d'enveloppe triangulaire de durée $2T$.

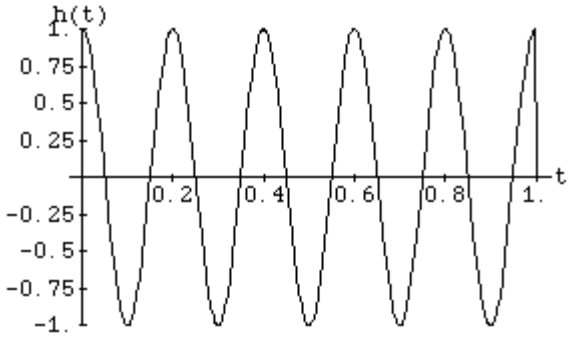
6) Forme des signaux:



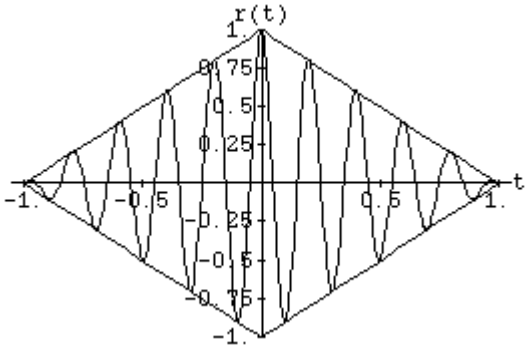
Impulsion rectangulaire émise



Sortie du filtre adapté



Impulsion sinusoïdale émise



Sortie du filtre adapté

3.2 Notion de filtre adapté

On considère une modulation numérique linéaire au débit $D_s = \frac{1}{T}$. $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_k h(t-kT)$.

$\{a_k\}$ est une suite binaire i.i.d. à valeurs $\{+A, -A\}$ équiprobables.

1) Le filtre $H(f) = \begin{cases} \cos\frac{\pi fT}{2} & \text{pour } |f| \le \frac{1}{T} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$ est de largeur de bande $B = \frac{1}{T}$

Pour satisfaire le critère de Nyquist au débit $B = \frac{1}{T}$,

il faut que : $H\left(\frac{1}{2T}\right) = \frac{H(0)}{2}$ (on rappelle que la condition n'est pas suffisante)

mais $H\left(\frac{1}{2T}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq \frac{1}{2}$ donc $H(f)$ ne satisfait pas le critère de Nyquist.

2) On filtre le signal $x(t)$ par le filtre adapté de réponse impulsionnelle $g(t) = h^*(-t)$ pour obtenir $y(t)$.

a) Le filtre adapté à l'impulsion $h(t)$ est de réponse impulsionnelle $g(t) = h^*(-t)$ et à pour réponse en fréquence: $G(f) = H^*(f)$

b) Comme $h(t)$, $g(t)$ ne vérifie pas le critère de Nyquist

c) L'impulsion filtrée $r(t) = h(t) * g(t)$ est l'autocorrélation de $h(t)$:

$$r(t) = h(t) * h^*(-t) = R_h(t)$$

Sa transformée de Fourier est : $R(f) = H(f) \cdot H^*(f) = |H(f)|^2 = \cos^2\left(\frac{\pi fT}{2}\right)$

$R\left(\frac{1}{2T}\right) = \frac{R(0)}{2}$ et il est de même largeur de bande $B = \frac{1}{T}$ que le filtre $H(f)$.

On vérifie que $R(f)$ satisfait le critère de Nyquist :

$$|H(f)|^2 * \text{Ш}_{\frac{1}{T_s}}(f) = T_s \cdot R_h(0) = cste \quad \Rightarrow \quad \cos^2\left(\frac{\pi fT}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi\left(f - 1/T\right)T}{2}\right) = 1$$

Rappelons que le critère de Nyquist doit être vérifié à la sortie du filtre de réception.

3)

a) Densité spectrale de puissance signal émis : $S_x(f) = \mathrm{E}\left\{a_k^2\right\} \cdot \frac{|H(f)|^2}{T} = \frac{A^2}{T}\cos^2\left(\frac{\pi fT}{2}\right)$

b) Quelle est la largeur de bande à 3dB de la DSP du signal $x(t)$: $B_{3\mathrm{dB}} = \frac{R}{2} = \frac{1}{2T}$

c) Quelle est la largeur de bande à 3dB de la DSP du signal $y(t)$: $B_{3\mathrm{dB}} = \frac{R}{2} = \frac{1}{2T}$

3.3 Critère de Nyquist en bande de base

① Le critère de Nyquist exprime en temps et surtout en fréquence, le critère de Non Interférence Entre les Symboles.

Soit h(t) la réponse impulsionnelle globale d'une chaîne de transmission, le signal à l'entrée de l'échantillonneur est représenté par : $z(t) = \sum_{m=\infty}^{+\infty} a_m\, h(t-mT) + b(t)$

Si z(kT) est la valeur de l'observation qui permet de décider le symbole $\hat{a}_k$,

$$z(kT) = a_k\, h(0) + \sum_{m\neq k} a_m h(kT-mT) + b(kT) = a_k\, h(0) + \sum_{j\neq k} a_{k-j}\, h(jT) + b(kT)$$

Soit : $z(kT) = a_k\, h(0) + IES + b(kT)$, IES est l'interférence entre symboles.

Elle est nulle pour toutes les suites $\{a_k\}$ si et seulement si $\begin{cases} h(mT) = 0 & \text{pour } m \neq 0 \\ h(0) \neq 0 & \text{pour } m = 0 \end{cases}$

Cette condition s'exprime en fréquence, en notant H(f) la transformée de Fourier de h(t).

$$\sum_{n=\infty}^{+\infty} H(f - \frac{n}{T}) = T \cdot h(0)$$

② Si le filtre est de largeur inférieure à $\frac{1}{T}$, le critère de Nyquist se traduit par les propriétés de symétrie suivantes : $\begin{cases} H\left(\frac{1}{2T}+f\right) = H(0) - H\left(\frac{1}{2T}-f\right) \\ H\left(\frac{1}{2T}\right) = \frac{H(0)}{2} \end{cases}$

Les filtres proposés sont tels que:

- $H_1\left(\frac{1}{2T}\right) = \frac{1}{3}$
- $H_2\left(\frac{1}{2T}\right) = \frac{1}{2}$
- $H_3(f)$ est de largeur supérieure à $\frac{1}{T}$. Mais on peut calculer ,

$N(f) = H_3(f) + H_3\left(f + \frac{1}{T}\right) + H_3\left(f + \frac{1}{T}\right)$

$N(0) = H_3(0) + H_3(-\frac{1}{T}) + H_3(\frac{1}{T}) = H_3(0)\ (1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}) = 1.5 \cdot H_3(0)$

$N(\frac{1}{2T}) = H_3(\frac{1}{2T}) + H_3(\frac{1}{2T} + \frac{1}{T}) + H_3(\frac{1}{2T} - \frac{1}{T}) = H_3(0) \cdot (\frac{3}{4} + 0 + \frac{3}{4}) = 1{,}5 \cdot H_3(0) = N(0)$

Par symétrie: $N(\frac{-1}{2T}) = N(\frac{1}{2T}) = 1{,}5 \cdot H_3(0)$. Donc $N(f) = N(0)$, $f \in [\frac{-1}{2T}, \frac{1}{2T}]$.

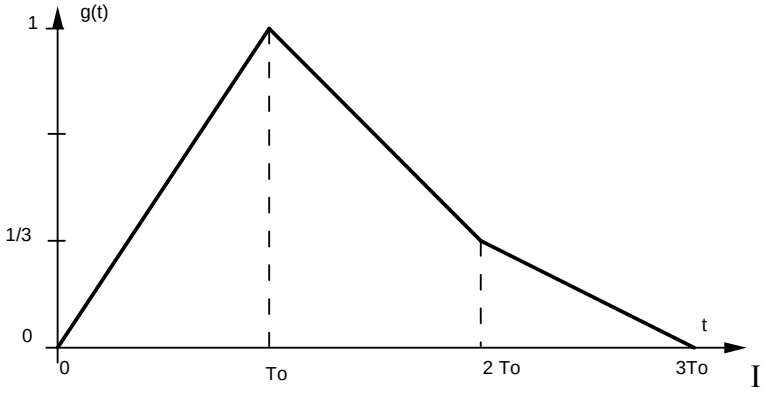
Le critère de Nyquist est vérifié pour les filtres $H_2(f)$ et $H_3(f)$.

③ Débits maxima :

- $H_1(f)$ permet de transmettre à un débit de $\frac{3}{4T} < \frac{1}{T}$.
- $H_2(f)$ permet de transmettre au débit $\frac{1}{T}$.
- $H_3(f)$ permettrait de transmettre au débit $\frac{3}{2T} > \frac{1}{T}$.

3.4 Débits optimaux

Réponse impulsionnelle :



Impulsions décalées au débit $1/T=1/2T_0$.

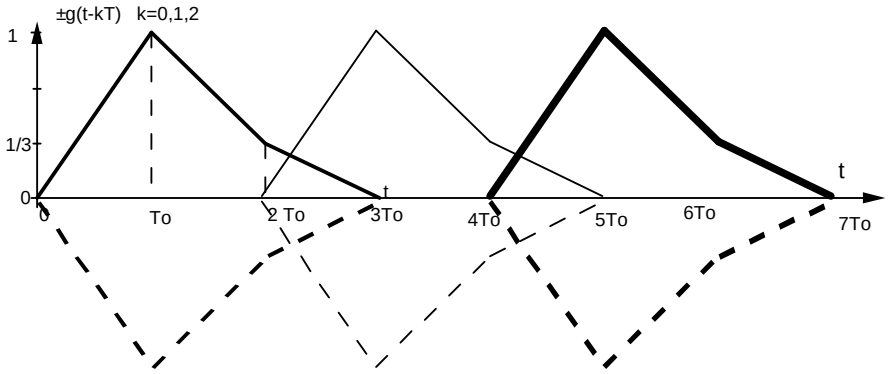
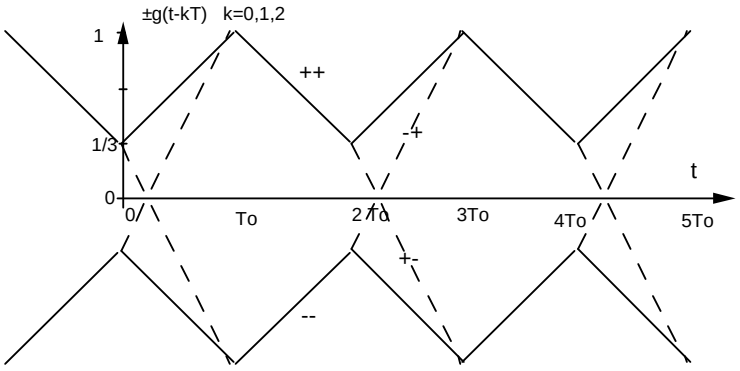


Diagramme de l'œil au débit $1/T=1/2T_0$.



Impulsions décalées au débit $1/T=1/T_0$.

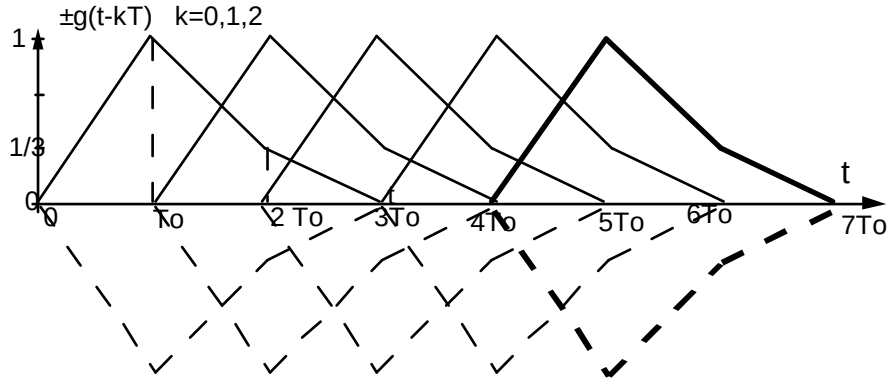
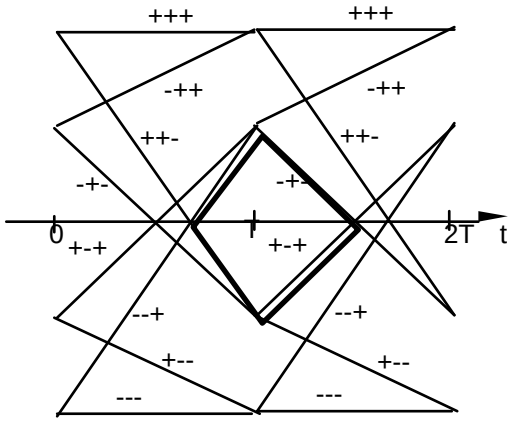


Diagramme de l'œil au débit $1/T=1/2T_0$.



1) On peut échantillonner à l'instant $t_e = (2k+1)T_0$ pour décider de la valeur supposée émise du symbole a_k. La valeur de cet échantillon ne dépend que de celle du symbole a_k que l'on veut déterminer. Il n'y a pas d'IES.

2) L'interférence inter symboles est minimale si l'on échantillonne aux instants kT_0 pour décider de la valeur du symbole a_{k-1}. La valeur du signal est 2/3 au lieu de 1 sans IES. La dégradation en distance est de 2 dB.

3.5 Calcul d'énergie

1) Le signal $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_k g(t-kT)$ à pour densité spectrale $S_x(f)=\frac{1}{T}|G(f)|^2$:

$$g(t)=\begin{cases}\sin\frac{\pi t}{T} & \text{pour } t\in[0,T]\\ 0 & \text{ailleurs}\end{cases},\quad g'(t)=g\left(t-\frac{T}{2}\right)=\begin{cases}\cos\frac{\pi t}{T} & \text{pour } t\in[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]\\ 0 & \text{ailleurs}\end{cases}$$

Les fonctions $g(t)$ et $g'(t)$ ont même module au carré car :

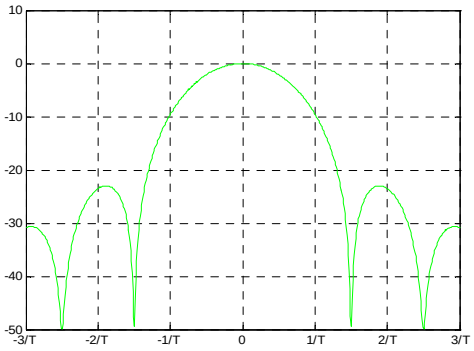
$$g'(t)=g\left(t-\frac{T}{2}\right)=g(t)*\delta\left(t-\frac{T}{2}\right)\quad\text{et}\quad G'(f)=G(f)\cdot e^{j2\pi f\frac{T}{2}}$$

$$g'(t)=g\left(t-\frac{T}{2}\right)=\cos\frac{\pi t}{T}\cdot\Pi_T(t)\ \Rightarrow\ G'(f)=\frac{\delta\left(f+\frac{1}{2T}\right)+\delta\left(f-\frac{1}{2T}\right)}{2}*T\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}$$

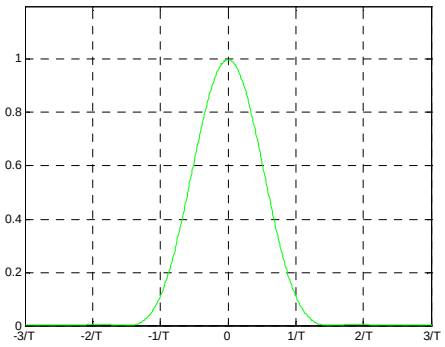
$$G'(f)=\frac{T}{2}\cdot\left(\frac{\sin\left(\pi\left(f+\frac{1}{2T}\right)T\right)}{\pi\left(f+\frac{1}{2T}\right)T}+\frac{\sin\left(\pi\left(f-\frac{1}{2T}\right)T\right)}{\pi\left(f-\frac{1}{2T}\right)T}\right)=\frac{1}{2\pi}\cdot\left(\frac{\cos(\pi fT)}{\left(f+\frac{1}{2T}\right)}-\frac{\cos(\pi fT)}{\left(f-\frac{1}{2T}\right)}\right)$$

$$G'(f)=\frac{-1}{2\pi T}\cdot\frac{\cos(\pi fT)}{\left(f^2-\frac{1}{4T^2}\right)}$$

La densité spectrale du signal est : $S_x(f)=\frac{|G'(f)|^2}{T}=\frac{1}{4\pi^2T^3}\cdot\frac{\cos^2(\pi fT)}{\left(f^2-\frac{1}{4T^2}\right)^2}$



DSP en dB



DSP en linéaire

2) L'énergie émise par symbole est : $E_s = E\left\{a_k^2\right\} \cdot \int_0^T g^2(t)dt = 1 \cdot \int_0^T \sin^2\left(\frac{\pi t}{T}\right)dt$

soit $E_s = \int_0^T \frac{1 - 2cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)}{2} dt = \frac{T}{2}$

La puissance du signal est $P = E_s \cdot D_s = \frac{1}{2}$

3) La largeur de bande en bande de base à -10dB est d'environ $\frac{1}{T}$.

Le spectre n'est pas borné mais il n'y a pas dIES aux instants de décision car en sortie du filtre adapté l'impulsion $h(t) = g(t) * g^*(-t)$ vérifie le critère de Nyquist :

$$h(t - kT) = 0\,, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^*$$

Ce qui s'écrit en fréquences : $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} H\left(f - \frac{n}{T}\right) = cste = T \cdot h(0)$.

Soit ici : $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left|G\left(f - \frac{n}{T}\right)\right|^2 = \frac{1}{4\pi^2 T^2} \cdot \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{\cos^2(\pi fT - n\pi)}{\left(\left(f - \frac{n}{T}\right)^2 - \frac{1}{4T^2}\right)^2} = cste$ (pas évident).

4) Avec un même débit symbole, pour doubler le débit binaire il faut transmettre deux eb par symbole donc utiliser une modulation quaternaire. Pour une MIA-4 a_k est à valeurs dans {-3, -1, 1 ,3 }. Pour une MAQ-4 a_k est à valeurs dans $\left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\} + \frac{\pi}{4}$.

L'énergie par symbole devient $E_s = \frac{5T}{2}$. L'énergie par bit est $E_b = \frac{E_s}{2} = \frac{5T}{4}$.

Remarque, pour les mêmes performances on montre que l'énergie émise par bit de la MIA-4 doit être multipliée par $\frac{5}{2}$ soit +4 dB, alors que c'est la même pour une MAQ-4.

3.6 Brouilleur sinusoïdal

① La largeur de bande utile du canal est $f \in [\ 300,\ 3000\ [$ Hz.

Le débit symbole sera $D_s = 2400$ Bauds.

② La modulation est une MAQ-16.

La fréquence porteuse est de $300 + \dfrac{3000300}{2} = 1650$ Hz.

③ Le facteur de débordement maximum est de $\alpha = \dfrac{1350}{1200} - 1 = 0.125$, donc réalisable.