4 Modulation Sur Fréquence Porteuse

4.1 Modulations en Phase et en Quadrature

1) Schéma de principe de la chaîne de transmission. (voir cours)

2) Le filtre de réception optimal, pour un canal sans filtrage, est le filtre adapté a la forme émise $h(t)$, il à pour fonction de transfert en équivalent BdB :

$$H_r(f) = H^*(f) = H(f) = A \cdot \cos\left(\frac{\pi f}{2B}\right) \cdot \Pi_{2B}(f)$$

3) Le filtre global doit vérifier le critère de Nyquist :

$$P(f) = H(f) * H_r(f) = |H(f)|^2 = A^2 \cos^2\left(\frac{\pi f}{2B}\right) \cdot \Pi_{2B}(f)$$

doit vérifier : $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \cos^2\left(\frac{\pi(f-nR)}{2B}\right) \cdot \Pi_{2B}(f-nR) = Cste$. Qui est vérifié pour : $B = R$.

4) Le débit Baud D_s est lié au débit binaire D_b et au nombre d'états M de la modulation par

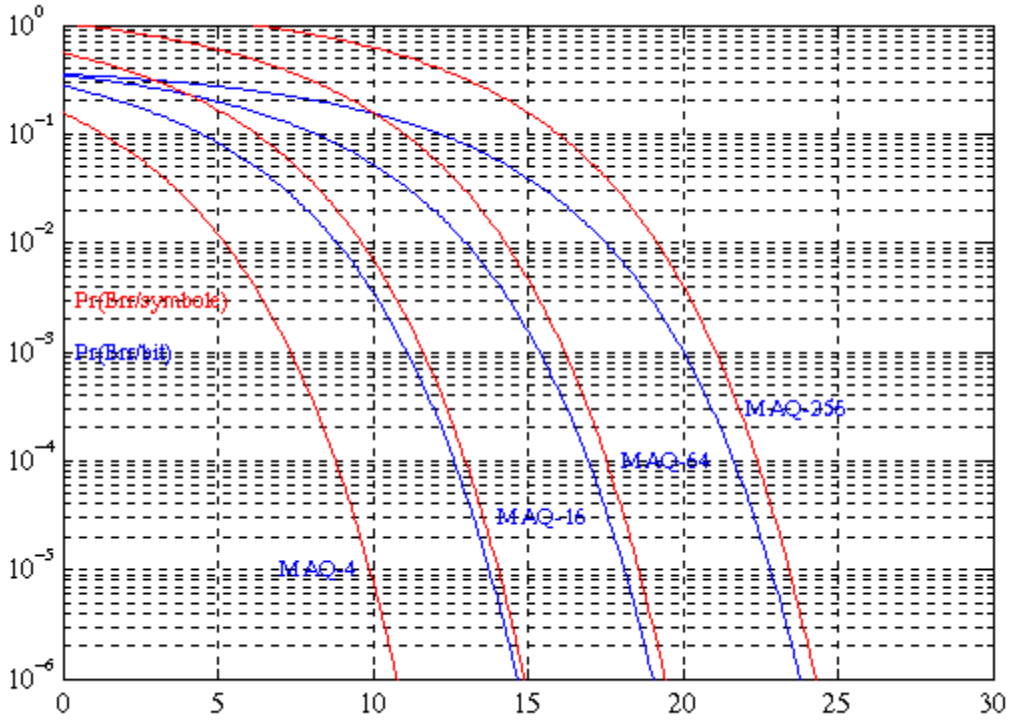
$$D_b = \log_2(M) \cdot D_s$$

soit $\log_2(M) = \frac{D_b}{B} = \frac{144 \cdot 10^6}{24 \cdot 10^6} = 6 = m = 2 \times 3$ Soit une MAQ-64.

5) Pour un taux d'erreur de 10^{-6}, en MAQ-4, le rapport E_b/N_0 doit être de 10,6 dB

Pour $M = 2^{2K}$, la perte en dB est de $10\log_{10}\left(\frac{\log_2(\sqrt{M})}{M-1}\right)$ voir (6.6) cours page 96.

Modulation	MAQ-4	MAQ-16	MAQ-64	MAQ-256
E_b/N_0 en dB	10,6	15,37	19,35	23,82
Perte en dB	0	4,77	8,75	13,22



L'énergie par bit nécessaire est de $E_b = N_o + 19.35 = -80 + 19.35 = -60.65$ dB

Soit $E_b = 0.86$ µW . La puissance correspondante est alors :

$$P_{moy} = E_b D_b = .86 \cdot 10^{-6} \cdot 144 \cdot 10^{6} = 124 \text{ W}$$

6) La densité spectrale du signal émis est en BdB : $S_{\alpha_s}(f) = \frac{|H(f)|^2}{T_s}\left\{\frac{2(M-1)}{3}\right\}$

Elle est proportionnelle à $|H(f)|^2$ qui est un filtre de largeur D_s .

$$|H(f)|^2 = A^2 \cos^2\left(\frac{\pi f}{2D_s}\right) \cdot \Pi_{2D_s}(f) \qquad |H(0)|^2 = A^2 .$$

La densité spectrale du signal passe bande est : $S(f) = \frac{1}{2}\left(|H(f-f_0)|^2 + |H(-f-f_0)|^2\right)$

L'énergie moyenne des symboles est $E_s = P/D_s = E\{E_i\} = E\left\{|d_k|^2\right\} \cdot \int |H(f)|^2 \, df$

$$E_s = P/D_s = \frac{2(M-1)}{3} \cdot A^2 \cdot \int_{-D_s}^{+D_s} \cos^2\left(\frac{\pi f}{2D_s}\right) df = \frac{2(M-1)}{3} \cdot A^2 \cdot D_s$$

sur la fréquence f_0 , $S(f_0) = \frac{|H(0)|^2}{2} = \frac{A^2}{2} = \frac{P}{D_s^2} \cdot \frac{3}{4(M-1)}$

4.2 Modulation M.S.K.

1) La modulation M.S.K. (Minimum Shift Keying) est une modulation sur fréquence porteuse en Phase et en Quadrature décalée. Le signal réel est modélisé par :

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_{2k}h(t-2kT)\cdot A\sqrt{2}\cos(2\pi f_0 t)-\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_{2k+1}h(t-(2k+1)T)\cdot A\sqrt{2}\sin(2\pi f_0 t)$$

Son enveloppe complexe associée à la fréquence f_0 et à la phase $\phi=0$ est définie par :

$$\alpha_x(t)= A\cdot\left(\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_{2k}h(t-2kT)+j\cdot\left(\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_{2k+1}h(t-(2k+1)T)\right)\right) \qquad a_k\in\{-1,+1\}$$

L'enveloppe d'un signal est définie par le module de son enveloppe complexe soit :

$$r(t)=|\alpha_x(t)|= A^2\cdot\left|\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_{2k}h(t-2kT)+j\cdot\left(\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_{2k+1}h(t-(2k+1)T)\right)\right|^2$$

On pose $t=nT+\theta$ et $\theta\in[\ 0,\ T\ ]$, si $n=2k$:

$$r(nT+\theta)=|\alpha_x(nT+\theta)|=A^2\left(\ a_{2n}^2\cdot h^2(\theta)+a_{2n-1}^2\cdot h^2(\theta-T)\right)$$

$$r(nT+\theta)=A^2\left(\ \cos^2\left(\frac{\pi\theta}{2T}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi(\theta-T)}{2T}\right)\right)=A^2\left(\ \cos^2\left(\frac{\pi\theta}{2T}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi\theta}{2T}\right)\right)=A^2$$

Une relation équivalente est obtenue pour *n* impair.

Le signal M.S.K. est un signal à enveloppe constante.

2) Déterminer sa densité spectrale.

Les symboles $\{a_k\}$ forment une suite de variables aléatoires Indépendantes et Identiquement Distribuées (I.I.D.).

La modulation M.S.K., en équivalent en bande de base, peut être représentée par la relation :

$$\alpha_x(t) = A \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n \; h(t-nT)$$

avec $c_{2k} = a_{2k}$ et $c_{2k+1} = j \cdot a_{2k+1}$

La suite $\{c_n\}$ est I.I.D. on montre que : $R_c(m) = E\left\{c_n c_{n-m}^*\right\} = \delta_{m,0}$

L'application de la formule de BENNETT est immédiate :

$$S_{\alpha_x}(f) = A^2 \frac{|H(f)|^2}{T} \cdot \left\{\sigma_c^2\right\} = A^2 \frac{|H(f)|^2}{T}$$

La densité spectrale du signal réel est définie à partir de celle de l'enveloppe complexe associée:

$$S_x(f) = \frac{1}{2}\left\{S_{\alpha_x}(f-f_0) + S_{\alpha_x}(-f-f_0)\right\}$$

$$h(t) = \cos\frac{\pi t}{2T} \cdot \Pi_{2T}(t) \quad \text{soit} \quad H(f) = \frac{\delta\left(f-\frac{1}{4T}\right) + \delta\left(f+\frac{1}{4T}\right)}{2} * 2T\,\mathrm{Sinc}\left(2\pi fT\right)$$

où * est le produit de convolution

$$H(f) = T\frac{\sin\left(2\pi\left(f-\frac{1}{4T}\right)T\right)}{2\pi\left(f-\frac{1}{4T}\right)T} + T\frac{\sin\left(2\pi\left(f+\frac{1}{4T}\right)T\right)}{2\pi\left(f+\frac{1}{4T}\right)T}$$

On réduit au même dénominateur :

$$H(f) = \frac{\left(f+\frac{1}{4T}\right)\sin\left(2\pi\left(f-\frac{1}{4T}\right)T\right) + \left(f-\frac{1}{4T}\right)\sin\left(2\pi\left(f+\frac{1}{4T}\right)T\right)}{2\pi\left(f^2-\frac{1}{16T^2}\right)}$$

$$H(f) = \frac{-\left(f+\frac{1}{4T}\right)\cos\left(2\pi fT\right) + \left(f-\frac{1}{4T}\right)\cos\left(2\pi fT\right)}{2\pi\left(f^2-\frac{1}{16T^2}\right)}$$

$$H(f) = \frac{-\cos\left(2\pi fT\right)}{4\pi T\left(f^2-\frac{1}{16T^2}\right)} = \frac{4T\cos\left(2\pi fT\right)}{\pi\ \left(1-16T^2f^2\right)}$$

$$S_{\alpha_x}(f) = \frac{A^2}{T}|H(f)|^2 = \frac{16A^2T\cos^2\left(2\pi fT\right)}{\pi^2\ \left(1-16T^2f^2\right)^2}$$

d'où :

$$S_x(f) = \frac{8A^2T}{\pi^2}\left(\left(\frac{\cos\left(2\pi\left(f-f_0\right)T\right)}{1-16T^2\left(f-f_0\right)^2}\right)^2 + \left(\frac{\cos\left(2\pi\left(-f-f_0\right)T\right)}{1-16T^2\left(-f-f_0\right)^2}\right)^2\right)$$

$$S_x(f_0) \approx \frac{8A^2T}{\pi^2}$$

La densité spectrale du signal M.S.K. s'annule pour $f = f_0 + \frac{3}{4T}$ mais elle décroît en $\frac{1}{f^4}$.

Par rapport à la densité spectrale de la MAQ-4, on observe un élargissement du lobe principal mais on a une décroissance plus rapide des lobes secondaires.

Modulation OQAM (Offset Quadrature Amplitude Modulation)

La forme générique de cette modulation est identique à celle de la M.S.K. La fonction de mise en forme est alors définie par:

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{pour } t \in [-T,+T] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad \text{soit} \quad h(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \Pi_{2T}(t)$$

soit : $H(f) = \sqrt{2}T\,\mathrm{Sinc}\left(2\pi fT\right)$

La densité spectrale en enveloppe complexe est:

$$S_{\alpha_x}(f) = \frac{A^2}{T}\left|H(f)\right|^2 = 2A^2T\,\mathrm{Sinc}^2\left(2\pi fT\right)$$

Soit la densité spectrale du signal réel:

$$S_x(f) = A^2T\left(\mathrm{Sinc}^2\left(2\pi\left(f-f_0\right)T\right) + \mathrm{Sinc}^2\left(2\pi\left(-f-f_0\right)T\right)\right)$$

$$S_x(f_0) \approx A^2T$$

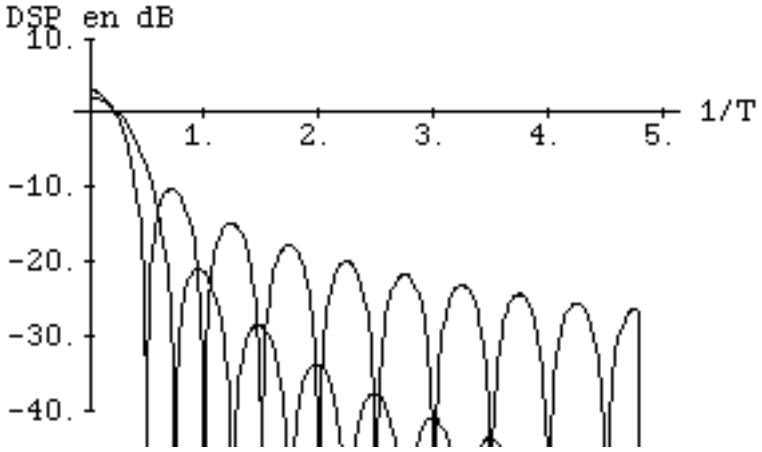


Figure 11. Densité spectrale des modulations OQAM et MDP4.

3) La fréquence instantanée d'un signal est définie par :

$f_i(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\phi(t)}{dt} = f_0 + h.d_n \cdot \frac{1}{2T}$

soient les deux valeurs possibles de la fréquence instantanée :

$f_1 = f_0 + \frac{1}{4T}$

$f_2 = f_0 - \frac{1}{4T}$

L'indice de modulation est défini par $h= (f_1-f_2).T = 1/2$

En modulation de fréquence analogique; l'indice de modulation β est défini à partir de la déviation de fréquence et de la fréquence du signal modulant s(t) par:

$\Delta f = \beta . f_m$

Ici $f_m = \frac{1}{2.T}$ et $\Delta f = \frac{1}{4.T}$ soit $h = \beta = (f_1-f_2).T = 0;5$

Une classe de modulation de fréquence à phase continue d'indice 1/2 à été largement étudiée.

4) arbre des phases.

5) Relation entre modulation M.S.K. et F.F.S.K.

La modulation M.S.K. est une modulation à enveloppe constante donc on peut la représenter comme une modulation de fréquence.

$$\alpha_x(t) = A.\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{2k}.h(t-2.k.T) + j \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{2k+1}.h(t-(2.k+1).T) \right)$$

On pose $t=n.T+\theta$ On pose A=1 (sans perte de généralité)

$\alpha_x(n.T+\theta) = a_{2k}.h((n-2.k.T)+\theta) + j\ a_{2k+1}.h((n-(2.k+1)).T) +\theta)$

Il faut distinguer n pair et n impair:

n pair: $n = 2.k$

$$\alpha_x(2k.T + \theta) = a_{2k} \cos\left(\frac{\pi.\theta}{2.T}\right) + j \quad a_{2k+1}.\cos\left(\frac{\pi.(\theta - T)}{2.T}\right)$$

$$\alpha_x(2k.T + \theta) = a_{2k} \cos\left(\frac{\pi.\theta}{2.T}\right) + j \quad a_{2k+1}.\sin\left(\frac{\pi.\theta}{2.T}\right)$$

Les symboles sont à valeurs dans {-1;1} soit: $j.a_k = \exp(j a_k \frac{\pi}{2})$

$$\alpha_x(2k.T + \theta) = a_{2k} \quad \exp\left(j \ \frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} \frac{\pi.\theta}{2.T}\right) = -j \ . \quad \exp\left(j \left(a_{2k} \frac{\pi}{2} + \frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} \frac{\pi.\theta}{2.T}\right)\right)$$

n impair n=2.k+1=

$$\alpha_x((2k+1).T + \theta) = a_{2k+2} \cos\left(\frac{\pi.(\theta - T)}{2.T} + j \quad a_{2k+1}.\cos\left(\frac{\pi.\theta}{2.T}\right)\right)$$

$$\alpha_x((2k+1).T + \theta) = j \quad a_{2k+1}. \left(-j \frac{a_{2k+2}}{a_{2k+1}} sin(\frac{\pi.\theta}{2.T}) + cos(\frac{\pi.\theta}{2.T})\right)$$

$$= \exp\left(j \left(a_{2k+1} \frac{\pi}{2} - \frac{a_{2k+2}}{a_{2k+1}} \frac{\pi.\theta}{2.T}\right)\right)$$

$$= \exp\left(j \left(a_{2k+1} \frac{a_{2k}}{a_{2k}} \frac{\pi}{2} - \frac{a_{2k+2}}{a_{2k+1}} \frac{\pi.\theta}{2.T}\right)\right)\pi$$

$$= - j \ \exp\left(j \left((a_{2k} - \frac{a_{2k+1}}{a_{2k}}) \ \frac{\pi}{2} - \frac{a_{2k+2}}{a_{2k+1}} \frac{\pi.\theta}{2.T}\right)\right)$$

Les variations de phase à partir de 2kT étant égales pour la MSK et pour la FFSK :

Pour n pair: $d_n = d_{2k} = - \frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = a_{2k}.a_{2k+1}$

Pour n impair: $d_n = d_{2k+1} = \frac{a_{2k+1}}{a_{2k+2}} = - a_{2k+2} . a_{2k+1}$

Un codage différentiel permet de passer de la suite a_k à la suite d_k .

Les modulations M.S.K. et F.F.S.K. sont équivalentes à un codage par transition près.

On pourra par exemple réaliser un modulateur F.F.S.K. et démoduler le signal reçu par un démodulateur adapté à la modulation M.S.K..

Visualisation graphique sur l'enveloppe complexe:

$\alpha_X(2k.T)$ est réel. $\alpha_X(2k.T + T)$ est imaginaire pur.

signe($\alpha_X(2k.T)$) = a_{2k} signe(Im($\alpha_X(2k.T + T)$) = a_{2k+1}

En fonction des valeurs des symboles a_{2k} et a_{2k+1}; la trajectoire décrite par l'enveloppe complexe $\alpha_X(2k.T+\theta)$ pour $\theta \in [0;T]$; décrit un quart de cercle dans le sens trigonométrique (d_{2k}=1) ou dans le sens inverse (d_{2k}=-1).

d_{2k}	a_{2k}= -1	a_{2k} =1
a_{2k+1} = -1	+1	-1
a_{2k+1} = 1	-1	+1

Soit $d_{2k} = a_{2k}\ a_{2k+1}$

Un raisonnement identique s'applique sur l'intervalle de temps (2k+1)T+θ pour $\theta \in [0;T]$.

αx((2k+1).T) est imaginaire pur. αx((2k+1).T + T) est réel.

signe(Im(αx((2k+1).T)) = a2k +1 signe(αx((2k+1).T + T)) = a2k+2

d2k+1	a2k+1= -1	a2k+1 =1
a2k+2 = -1	-1	+1
a2k+2 = 1	+1	-1

Soit $d_{2k+1} = - a_{2k+1}\ a_{2k+2}$

S'appuyer sur le cercle unité pour faire les tableaux.

6) Densité spectrale de la modulation FFSK.

Si la suite ak est I.I.D. alors la suite dk est également I.I.D.

La modulation F.F.S.K. à même densité spectrale de puissance que la modulation M.S.K..

4.3 MDP2 Codée et 3MDF2.

On considère une suite binaire $\{b_k\}$ à éléments successifs indépendants et identiquement distribués (i.i.d.), prenant ses valeurs dans l'ensemble $\{1,0\}$. Le débit binaire est de 1Mbit/s.

MDP2.

La suite binaire $\{b_k\}$ est transmise par une MDP2, la puissance émise est de 1Watt.
Le canal est à BABG et le récepteur est optimal cohérent.

1) Quelle est la largeur de bande à 3dB si l'impulsion de mise en forme est :
a) NRZ, b) en racine de cosinus surélevé de facteur de débordement $\alpha = 0.2$?

pour b) $R = D_s = D_b$ en MDP2, soit 1MHZ, ou $R/2$ en équivalent BdB

pour a) $B_{3\text{dB}} \approx R \cdot 0.88$ en MDP2 , c'est la valeur du sinus cardinal.

2) Quelle est l'énergie moyenne émise par bit et quelle est la distance entre les formes émises?

$E_b = P_e / D_b = 10^{-6}$ J . En MDP2 la distance est de $d = 2\sqrt{E_b}$ et $E_b = A^2$.

3) Quelle est la probabilité d'erreur par bit à la réception ?

$$\Pr\{Errb\} = Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

Pour améliorer les choses on code la suite binaire $\{b_k\}$ par un code de Hadamard $\mathbf{H}_4$.
Les mots de code ont 4 bits, ce sont les lignes des matrices $\mathbf{H}_4$ et $\overline{\mathbf{H}_4}$, le dernier bit est un contrôle de parité des trois premiers, le rendement est de $r = 3/4$.

La matrice se construit suivant la règle $\mathbf{H}_1 = [0]$; $\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{H}_{2^{n+1}} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{H}_{2^n} & \mathbf{H}_{2^n} \\ \hline \mathbf{H}_{2^n} & \overline{\mathbf{H}_{2^n}} \end{array}\right]$.

La suite de sortie $\{d_k\}$ est telle que $d_k \in \pm 1$ (les zéros sont transformés en -1).

Elle est transmise par la MDP2 du 1°), les erreurs sont détectables mais non corrigibles, on considère qu'en cas d'erreur sur un mot un seul bit sera restitué faux.

4) Quelle est la distance minimale entre les mots du code ?

Distance min de 2 en 0,1 et de 4 en ±1; $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\overline{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5) Quelle est la probabilité d'erreur sur les bits puis sur mots de code en décision dure ?

$$\Pr\{Errb'\} = Q\left(\sqrt{\frac{d'^2}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{3E_b}{2N_0}}\right) \;;\; d' = 2\sqrt{E'_b} \;;\; E'_b = P_e / D'_b = \frac{3}{4}E_b = \frac{3}{4}10^{-6}\,\mathrm{J}\,.$$

Les bits sont supposés indépendants : $\Pr\{Errmot\} = 1-(1-\Pr\{Errb'\})^4 \approx 4\cdot\Pr\{Errb'\}$

6) Quelle est la probabilité d'erreur sur les bits après décodage ?

1 bit sur trois faux $\Pr\{Errb\} = 4\cdot\Pr\{Errb'\}\cdot\frac{1}{3} = \frac{4}{3}\cdot Q\left(\sqrt{\frac{3E_b}{2N_0}}\right)$

3MDF2.

La suite binaire $\{b_k\}$ est maintenant transmise par une modulation sur trois porteuses (à 2 états) orthogonales émises simultanément. La puissance émise est toujours de 1Watt.

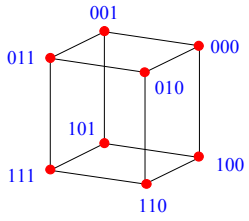
7) Quelle est la largeur de bande à 3dB si l'impulsion de mise en forme est NRZ ?

On émet 3 bits sur une forme, $D_s = D_b / 3$ Ce n'est pas un multiplex. Ce ne sont pas non plus des signaux bi-orthogonaux car les trois fréquences sont émises.

Les trois fréquences sont émises simultanément pour former un symbole $B \approx 3\cdot D_s = D_b$

8) Dessiner la constellation du signal avec un codage de Gray.

Les formes sont sur les sommets du cube de $\mathbb{R}^3$.



9) Quelle est l'énergie moyenne émise par bit et quelle est la distance entre les formes émises?

3MDF2 : Sur un axe : $+A$ ou 0 si la forme $g(t)$ est normée;

distance mini entre points = le coté d'une face : $d = A$ ou $d^2 = A^2$.

Energie moyenne :

$$E_s = \mathrm{E}\{E_i\} = \left(0 + 3A^2 + 3\cdot 2A^2 + 3A^2\right)\frac{1}{8} = 3\cdot\frac{A^2}{2} = E_b\frac{D_b}{D_s} = 3E_b \;,\quad \text{soit } E_b = \frac{A^2}{2}.$$

Si on avait 3MDP2 : Sur un axe : $\pm A$; cube semblable au précédent.

distance entre points = le coté d'une face : $d = 2A$ ou $d^2 = 4A^2$

Distance au centre : $d_0^2 = 2A^2 + A^2 = 3A^2$ ou $d_0 = A\sqrt{3}$

Energie moyenne : $E_s = E_i = d_0^2 = 3A^2 = E_b\frac{D_b}{D_s} = 3E_b$ ou $E_b = A^2$.

10) Quelle est la probabilité d'erreur par bit ? (Canal BABG et récepteur optimal cohérent) (Utiliser la borne de l'union).

$$\Pr\{Errs\} = 8 \cdot \frac{1}{8} \cdot 3Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right) = 3Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

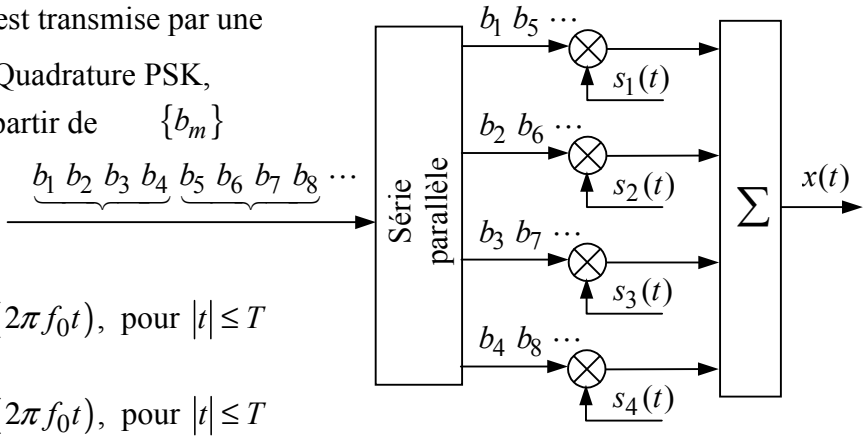
Chaque point est équiprobable et à 3 voisins immédiats.

4.4 Modulation Q²PSK.

On considère une suite binaire $\{b_m\}$ à éléments successifs indépendants et identiquement distribués (i.i.d.), prenant ses valeurs dans l'ensemble $\{\pm 1\}$. Le débit binaire est de 10Mbit/s.

Cette suite binaire $\{b_m\}$ est transmise par une modulation Quadrature-Quadrature PSK, un symbole est formé à partir de $\{b_m\}$ quatre bits d'après le schéma ci contre :

$\underbrace{b_1\ b_2\ b_3\ b_4}\ \underbrace{b_5\ b_6\ b_7\ b_8}\ \cdots$



$$s_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{2T}\right) \cdot \cos(2\pi f_0 t), \text{ pour } |t| \le T$$

$$s_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{2T}\right) \cdot \cos(2\pi f_0 t), \text{ pour } |t| \le T$$

$$s_3(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{2T}\right) \cdot \sin(2\pi f_0 t), \text{ pour } |t| \le T$$

$$s_4(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{2T}\right) \cdot \sin(2\pi f_0 t), \text{ pour } |t| \le T$$

(T est la période symbole) ($f_0 = 1\text{GHz}$)

Le signal émis s'écrit $x(t) = \sum_k \left(\sum_{i=1}^{4} b_{4k+i} \cdot s_i(t - kT) \right)$

1) Montrer que les signaux, $s_i(t)$, sont orthogonaux.

$\cos^2 b = \frac{1}{2}(1 + \cos 2b)$; $\frac{1}{2}(1 + \cos 2b)\sin a = \frac{1}{2}\left(\sin a + \frac{1}{2}(\sin(a+2b) + \sin(a-2b))\right)$

intégrale d'une fonction impaire sur $[-T, +T]$

+ condition $f_0 T = 400 \in \mathbb{N}$ porteuses orthogonales

2) Quelle est l'énergie moyenne émise par bit ? $E_b = 1$ Joule/bit

$$E_s = \mathrm{E}\left\{\int_{-T}^{+T}\left|\sum_{i=1}^{4} b_i s_i(t)\right|^2 dt\right\} = \int_{-T}^{+T}\sum_{i=1}^{4} E\left\{b_i^2\right\}|s_i(t)|^2 dt = \int_{-T}^{+T}\frac{2}{T}dt = 4 \text{ J/symbole}, \quad E_b = 1 \text{ J/bit}$$

3) Quelle est l'enveloppe complexe $\alpha_x(t)$, par rapport à f_0, de $x(t)$?

$$t_k = t - kT; \quad \sum_k \cos\left(\frac{\pi t_k}{2T}\right)\cdot\cos(2\pi f_0 t_k)\cdot \Pi_{2T}(t_k) = \sum_k \cos\left(\frac{\pi t_k}{2T}\right)\cdot \Pi_{2T}(t_k)\cdot\cos(2\pi f_0 t)$$

d'où $$\alpha_x(t) = \sum_k \frac{1}{\sqrt{T}}\left(\left(b_{4k+1} - jb_{4k+3}\right)\cos\left(\frac{\pi t_k}{2T}\right) + \left(b_{4k+2} - jb_{4k+4}\right)\sin\left(\frac{\pi t_k}{2T}\right)\right)\cdot \Pi_{2T}(t_k)$$

4) Ecrire $\alpha_x(t)$ sous la forme $\sum_k \left(a_{1k} g_1(t-kT) + a_{2k} g_2(t-kT)\right)$ et en déduire sa DSP.

$$g_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\cos\left(\frac{\pi t}{2T}\right)\Pi_{2T}(t) \quad g_2(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\sin\left(\frac{\pi t}{2T}\right)\Pi_{2T}(t) \quad a_{1k} = b_{4k+1} - jb_{4k+3}$$

Formule de Bennett. $$S_{\alpha_x}(f) = \frac{2}{T}|G_1(f)|^2 + \frac{2}{T}|G_2(f)|^2$$

$$\sin 2\pi\left(fT + \frac{1}{4}\right) = \sin\left(2\pi fT + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2\pi fT$$

$$G_2(f) = \frac{2T}{j\sqrt{T}}\left(\mathrm{Sinc}\,2\pi\left(fT - \frac{1}{4}\right) - \mathrm{Sinc}\,2\pi\left(fT + \frac{1}{4}\right)\right) = \frac{16\sqrt{T}}{\pi^2}\cdot\frac{2\pi fT\cdot\cos 2\pi fT}{1-16f^2T^2}$$

$$G_1(f) = \frac{2T}{\sqrt{T}}\left(\mathrm{Sinc}\,2\pi\left(fT - \frac{1}{4}\right) + \mathrm{Sinc}\,2\pi\left(fT + \frac{1}{4}\right)\right) = \frac{16\sqrt{T}}{\pi^2}\cdot\frac{\frac{\pi}{2}\cdot\cos 2\pi fT}{1-16f^2T^2}$$

$$S_{\alpha_x}(f) = 4\cdot 2\left(\mathrm{Sinc}^2\,2\pi\left(fT - \tfrac{1}{4}\right) + \mathrm{Sinc}^2\,2\pi\left(fT + \tfrac{1}{4}\right)\right) = \frac{8}{4\pi^2}\left(\frac{\cos^2 2\pi fT}{\left(fT + \frac{1}{4}\right)^2} + \frac{\cos^2 2\pi fT}{\left(fT - \frac{1}{4}\right)^2}\right)$$

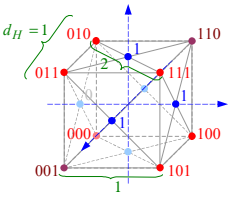
5) Comparer l'efficacité spectrale de la QQPSK à celle de la MSK.

$$S_{\alpha_x}(f) = \frac{16^2}{4\pi^2}\frac{\left(1+16f^2T^2\right)\cos^2 2\pi fT}{\left(1-16f^2T^2\right)^2} \qquad S_{\substack{\alpha_x \\ MSK}}(f) = \frac{16A^2T}{\pi^2}\cdot\frac{\cos^2 2\pi fT'}{\left(1-16f^2T'^2\right)^2}$$

Mais $D_s' = 2\cdot D_s$ (2 bits par symbole au lieu de 4)

6) Décrire la constellation de cette modulation, un codage de Gray est -il possible?

Hypercube 4D d'axes s_1, s_2, s_3, s_4 (ex en 3D :



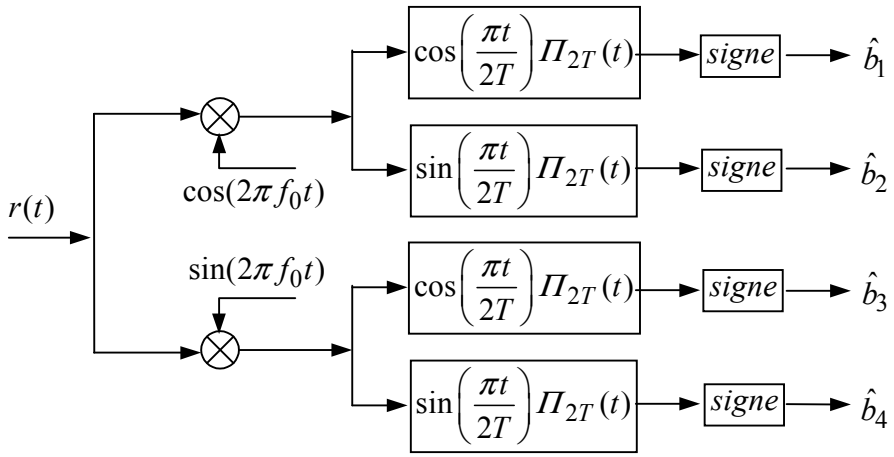
Chaque point a 4 voisins immédiats à une distance de dmin

7) Donner la représentation vectorielle et déterminer la distance minimale entre les points en fonction de l'énergie moyenne par symbole.

4D Ensemble des vecteurs de la forme $\mathbf{v} = \frac{\sqrt{E_s}}{2}[\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1]^T$ équiprobables et de même énergie $E_i = |\mathbf{v}_i|^2 = \frac{E_s}{4} \cdot 4$; $d_{\min} = \sqrt{E_s}$. Le codage de Gray est naturel (systématique).

8) La transmission se fait dans un canal idéal BABG, le récepteur est optimal cohérent. Donner la structure du récepteur (schéma).

Démodulateurs en quadrature et filtres adaptés à chaque forme (cos et sin)



9) Calculer un majorant de la probabilité d'erreur par bit résiduelle. (Borne de l'union).

Chaque point a 4 voisins à distance min qui ne différent que d'un seul bit sur quatre.

$$E_s = E_b \cdot D_b / D_s = 4E_b ; \quad d_{\min}^2 = E_s ; \quad \Pr\{Erb\} \le \sum_{i=1}^{M=16} \left(4 \cdot \frac{1}{4} \cdot Q\left(\sqrt{\frac{2 \cdot E_b}{N_0}} \right) + \varepsilon \right) \cdot \frac{1}{16}$$

10) Calculer la probabilité d'erreur résiduelle exacte. Comparer à la MAQ-4.

La décision se fait sur chaque voie pour chaque bit, ceux-ci sont indépendants donc la probabilité d'erreur par symbole est de faire au moins un bit faux. Mais la probabilité d'erreur par bit est celle obtenue sur chacune des voies du récepteur optimal puisqu'elles sont identiques.

$$\Pr\{Erb\} = Q\left(\sqrt{\frac{d_{bit}^2}{2N_0}} \right) = Q\left(\sqrt{\frac{d_{\min}^2}{2N_0}} \right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \right)$$

11) AN : $P_e = 1$ mW. Affaiblissement 40 dB. $N_0 = -170$ dBW/Hz .

Energie par bit reçue $E_b = P_e \cdot Aff / D_b \rightarrow E_b = -30 - 40 - 70 = -140$dB

$$E_b / N_0 = 30\text{dB} ; \quad \Pr\{Erb\} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \right) \approx 0$$