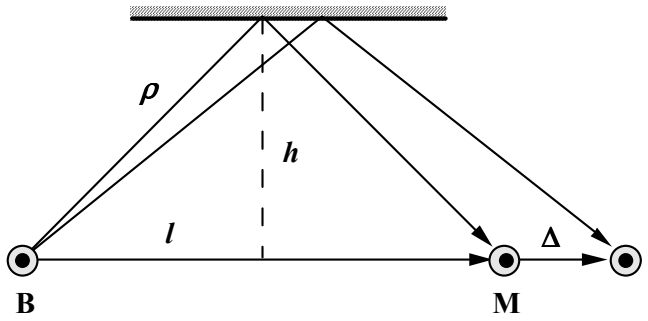
5 Canal Non Stationnaire.

5.1 Évanouissements par trajets multiples.

D'après la figure ci-dessous le mobile M reçoit, de la station de base B, un trajet direct de longueur l et un trajet réfléchi de longueur ρ. A l'instant t le mobile reçoit par le trajet direct le signal $x_d(t) = \mathrm{Re}\left\{ s(t)\sqrt{2}\, e^{j\omega_0 t} \right\}$, où $s(t)$ représente l'enveloppe complexe (par rapport à f_0) qui est le signal d'information.



① En appelant τ la différence de temps de propagation, quelle est, à l'instant t, l'enveloppe complexe $r(t)$, du signal reçu par le mobile, lorsque le trajet réfléchi est présent.

$$r(t) = \sum_n \alpha_n \, e^{-j\omega_0 \tau_n} s(t-\tau_n) = \alpha_0 s(t) + \alpha_1 e^{-j\omega_0 \tau} s(t-\tau)$$

② Calculer, en fonction de l et de h, la différence de marche $d = \rho - l$ entre les deux trajets, puis la différence de temps de propagation τ

(la célérité du milieu est : $c = 3 \cdot 10^8 \, m/s$).

$$\rho^2 = l^2 + 4h^2 \quad \rightarrow \quad d = \rho - l = \sqrt{l^2 + 4h^2} - l \qquad , \qquad \tau = \frac{\rho - l}{c}$$

③ Quelles conditions sur $s(t)$ et τ, doit-on avoir pour que $s(t) \# s(t-\tau)$?

Les variations de $s(t)$ doivent être lentes relativement au retard des trajets, ce sera le cas si $s(t)$ est un signal basses fréquences.

$s(t)$ est de fréquence maximum f_M $\Leftrightarrow$ Période mini $1/f_M$ $\Leftrightarrow$ $\tau \leq \frac{1}{100} \frac{1}{f_M}$

④ En supposant $s(t) \# s(t-\tau)$, donner l'expression de $r(t)$ en fonction de $s(t)$, de τ et des affaiblissements α_0 et α_1 des deux trajets. Puis, dans le cas $\alpha_0 = \alpha_1$, celle de $|r(t)|^2$ en fonction de *d* et λ_0.

$$r(t) = s(t) \cdot \left(\alpha_0 + \alpha_1 \mathrm{e}^{j2\pi f_0 \tau} \right)$$

$$|r(t)|^2 = |s(t)|^2 \cdot \alpha_0^2 \cdot \left| 1 + \mathrm{e}^{j2\pi f_0 \tau} \right|^2 = |s(t)|^2 \cdot \alpha_0^2 \cdot \left(2 + 2\,\mathrm{Re}\left\{ \mathrm{e}^{j2\pi f_0 \tau} \right\} \right)$$

$$|r(t)|^2 = 2\alpha_0^2 |s(t)|^2 \left(1 + \cos 2\pi f_0 \tau \right) = 2\alpha_0^2 |s(t)|^2 \left(1 + \cos 2\pi \frac{d}{\lambda_0} \right)$$

⑤ On choisit : $f_0 = 3\mathrm{GHz}$, $f_M = 1\mathrm{MHz}$, $h = 20\mathrm{m}$, $l = 200\mathrm{m}$ puis $l = 1000\mathrm{m}$.

Vérifier que l'approximation $s(t) \# s(t-\tau)$ est valable.

$h = 20\mathrm{m}$, $l = 200\mathrm{m}$: $l^2 + 4h^2 = 4 \cdot 10^4 + 16 \cdot 10^2 = 41\,600$

$$d = \sqrt{l^2 + 4h^2} - l \approx 203{,}96 - 200 \approx 4\mathrm{m}$$

$$\tau = \frac{d}{c} \approx \frac{4}{3 \cdot 10^8} \cong \frac{1}{100 f_M} = \frac{1}{10^2 \cdot 10^6} = \frac{1}{10^8} \quad \text{(cas limite)}$$

$h = 20\mathrm{m}$, $l = 1000\mathrm{m}$: $l^2 + 4h^2 = 10^6 + 16 \cdot 10^2 = 1\,001\,600$

$$d = \sqrt{l^2 + 4h^2} - l \approx 1000{,}799 - 200 \approx 0{,}8\mathrm{m}$$

$$\tau = \frac{d}{c} \approx \frac{0{,}8}{3 \cdot 10^8} \leq \frac{1}{100 f_M} = \frac{1}{10^8}$$

⑥ En fonction de *l*, tracer l'évolution de $|r(t)|^2$ au voisinage de $l = 200\mathrm{m}$ puis $l = 1000\mathrm{m}$.

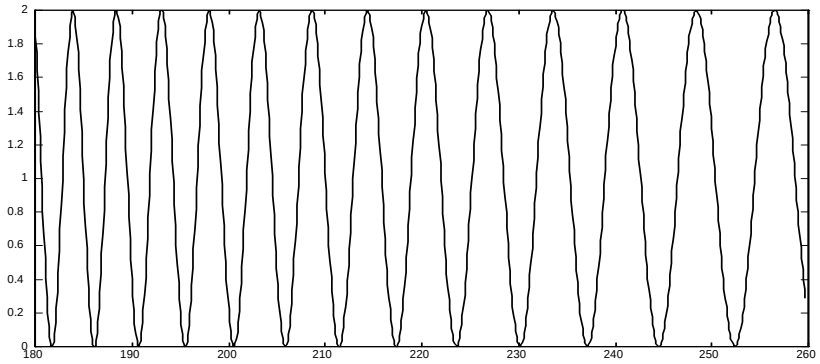
(on fera l'approximation $h/l << 1$). On regardera le cas $\alpha_1 = \alpha_0 / 2$.

$$d = l \cdot \left(\sqrt{1 + 4\frac{h^2}{l^2}} - 1 \right) \# l \cdot \left(1 + 2\frac{h^2}{l^2} - 1 \right) = 2\frac{h^2}{l}$$

$$|r(t)|^2 = Cste \cdot \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \frac{2h^2}{l} \right) \right), \quad \lambda_0 = \frac{c}{f_0} = \frac{3 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^9} = 0{,}1\,\mathrm{m}.$$

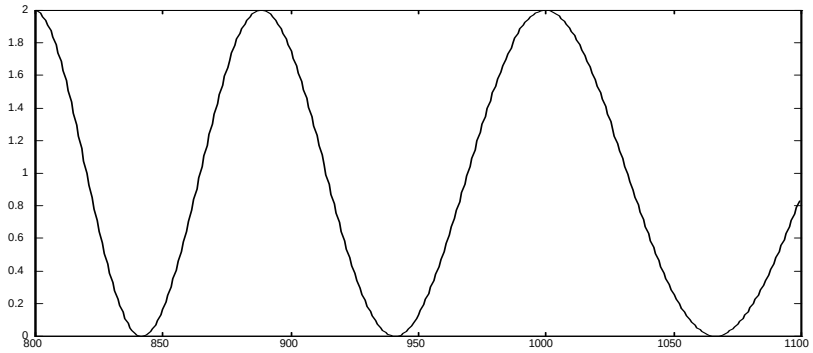
Pour $l = 200\text{m}$, d # 4m :

$$|r(t)|^2 = Cste \cdot \left(1+\cos\left(2\pi \cdot \frac{\sqrt{l^2+1600}-l}{0,1}\right)\right) \approx Cste \cdot \left(1+\cos\left(2\pi \cdot \frac{8000}{l}\right)\right)$$



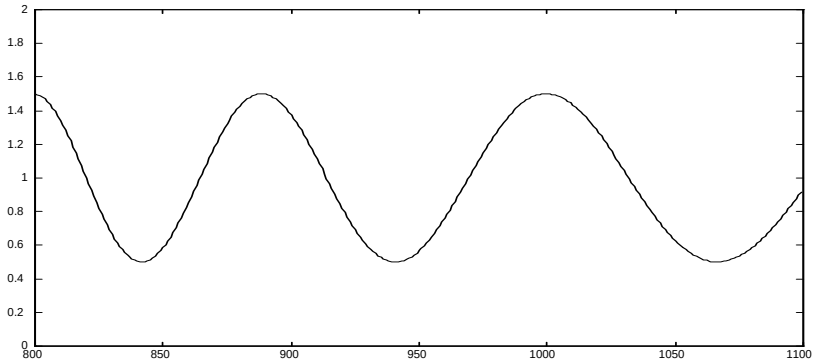
Pour $l = 1000\text{m}$, d # 0,8m :

$$|r(t)|^2 \approx Cste \cdot \left(1+\cos\left(2\pi \cdot \frac{2 \cdot 10^7}{l}\right)\right)$$



Pour $l = 1000\text{m}$, d # 0,8m et $\alpha_1 = \alpha_0 / 2$:

$$|r(t)|^2 \approx Cste \cdot \left(1+\frac{1}{2}\cos\left(2\pi \cdot \frac{2 \cdot 10^7}{l}\right)\right)$$



⑦ Quel est le temps entre deux évanouissements pour un mobile se déplaçant à 50km/h, pour $l = 200\text{m}$ puis $l = 1000\text{m}$.

La distance entre deux évanouissements correspond à une période en l du cosinus, donc au déplacement Δ du véhicule.

$$\frac{2\pi}{\lambda_0}\cdot\frac{2h^2}{l} = 2k\pi \quad \text{et} \quad \frac{2\pi}{\lambda_0}\cdot\frac{2h^2}{l+\Delta} = 2(k-1)\pi$$

$$\frac{2h^2}{\lambda_0(l+\Delta)} = k-1 = \frac{2h^2}{\lambda_0 l} - 1 \quad \rightarrow \quad l+\Delta = \frac{2h^2 l}{2h^2 - \lambda_0 l}$$

$$\Delta = l\cdot\left(\frac{2h^2}{2h^2-\lambda_0 l} - 1\right) = \frac{\lambda_0 l^2}{2h^2 - \lambda_0 l}$$

Pour $l = 200\text{m}$:

$$\Delta = \frac{\lambda_0 l^2}{2h^2 - \lambda_0 l} = \frac{0{,}1\cdot 4\cdot 10^4}{8\cdot 10^2 + 0{,}1\cdot 2\cdot 10^2} = \frac{4\cdot 10^3}{820} \approx 4{,}878 \approx 5\text{m}$$

$$t = \frac{\Delta}{v} = \frac{5}{50\cdot 10^3} = 10^{-4}\text{h} = 0{,}36\text{s}$$

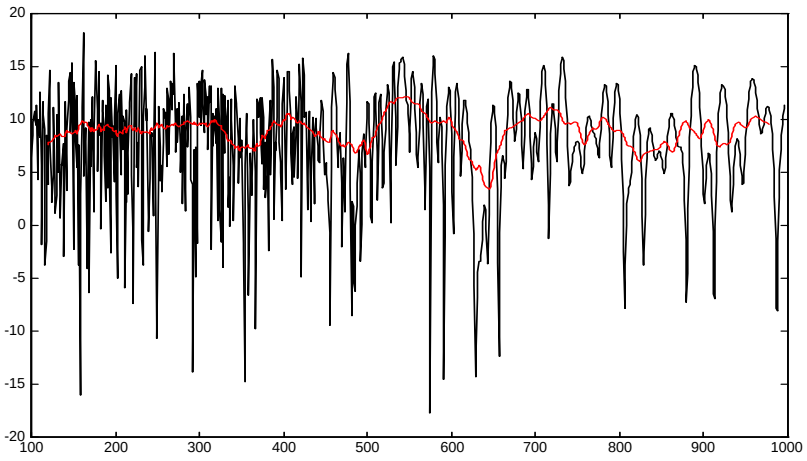
Pour $l = 1000\text{m}$:

$$\Delta = \frac{\lambda_0 l^2}{2h^2 - \lambda_0 l} = \frac{0{,}1\cdot 10^6}{8\cdot 10^2 + 0{,}1\cdot 10^3} = \frac{10^5}{900} \approx 111\text{m}$$

$$t = \frac{\Delta}{v} = \frac{110}{50\cdot 10^3} = 55\cdot 10^{-4}\text{h} \approx 19{,}8\text{s} \approx 20\text{s}$$

Remarques :

Le déplacement correspondant sur la surface de l'immeuble est de $\Delta/2$, soit de 55m pour $l = 1000\text{m}$, ce qui est peu probable. Par contre en zone urbaine le signal reçu est dû à la superposition de nombreux trajets et les distances entre deux évanouissements sont très petites.



Tracé en dB des évanouissements pour une trentaine de réflexions.

5.2 Canal de Rayleigh & Diversité.

On désire réaliser la transmission d'une modulation MDP2 dans un canal de Rayleigh non sélectif de cœfficient $c = \rho e^{j\theta}$ avec $\mathrm{E}\{|c|^2\} = 2\sigma^2$.

Le canal est à Bruit Additif Blanc Gaussien de DSP $N_0/2$.

1) **structure du récepteur et le schéma du canal discret équivalent :**

Canal à trajets multiples non stationnaire et dispersif :

$c(\tau,t) = \alpha(\tau,t)\mathrm{e}^{-j\omega_0\tau} \cdot u(\tau)$ est, à l'instant t, la réponse impulsionnelle, causale en τ, du canal linéaire variant dans le temps (LVT).

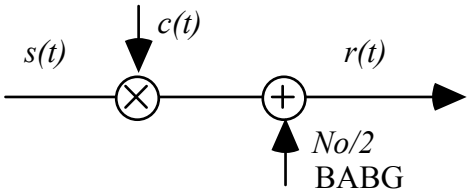
Cas d'un nombre fini de trajets : $c(\tau,t) = \sum_n \alpha_n(t)\,\mathrm{e}^{-j\omega_0\tau_n(t)}\delta(\tau - \tau_n(t))$

Fonction de transfert, à l'instant t,du canal LVT : $C(f,t) = \int c(\tau,t)\,\mathrm{e}^{-j2\pi f\tau} d\tau$

Canal non dispersif (ou non sélectif) : $C(f,t) = C(0,t) \quad , \quad \forall f$

soit : $c(\tau,t) = C(0,t)\cdot\delta(\tau)$

Le signal reçu est : $r(t) = c(\tau,t) * s(\tau)\big|_t = C(0,t)\cdot\left(\delta(\tau) * s(\tau)\big|_t\right) = \alpha(t)\cdot s(t)$, produit simple.



Représentation discrète des signaux :

On projette les signaux sur une base orthonormée contenant l'espace des signaux.

Pour les MAQ et MDP on projette sur la base orthonormée $\left\{g(t)\sqrt{2}\cos\omega_0 t,\, g(t)\sqrt{2}\sin\omega_0 t\right\}$.

Ici il s'agit d'une MDP-2 (MIA-2 en équivalent BdB), les symboles sont indépendants au cours du temps (la modulation est sans mémoire) et il n'y a pas d'IES de canal, on peut donc faire la détection (symbole par symbole) à chaque instant nT

Le signal MDP-2 émis à un instant donné nT_s est : $s(t) = d_n\sqrt{E_b}\cdot g(t)\sqrt{2}\cos\omega_0 t$, on projette sur $\left\{g(t)\sqrt{2}\cos\omega_0 t,\, g(t)\sqrt{2}\sin\omega_0 t\right\}$ ce qui donne le vecteur $\left[d_n\sqrt{E_b};\ 0\right]$.
Les formes émises sont $\mathbf{s}_1 = \left[+\sqrt{E_b};\ 0\right]$; $\mathbf{s}_2 = \left[-\sqrt{E_b};\ 0\right]$. En représentation vectorielle.

En équivalent BdB le signal émis à un instant donné nT_s est : $s(t) = d_n g(t)\cdot\sqrt{E_b}$, on projette ici sur $g(t)$ normé.
Les formes émises sont $s_1 = +\sqrt{E_b} + j0$; $s_2 = -\sqrt{E_b} + j0$. En représentation complexe.

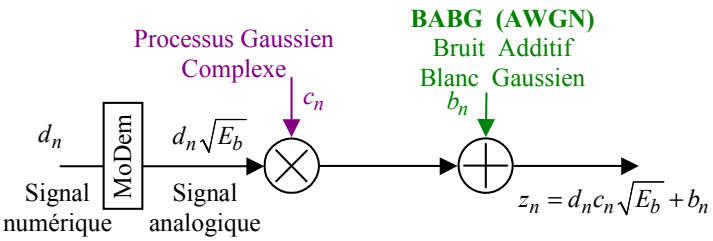
Ici le signal MDP-2 ne fait intervenir que la composante en phase (ou la partie réelle).

Pour la MDP-2, la composante scalaire émise est donc $s_n = d_n\cdot\sqrt{E_b} = \pm\sqrt{E_b}$.

Le signal reçu observé avant démodulation est : $r(t) = c(t)\cdot s(t) + b(t)$.

Pour un canal variant lentement au cours du temps (Fading lent) : $c(t) \approx c_n = \rho_n e^{j\theta_n}$ constant sur la durée d'un symbole (intégrale de projection). (mais $c_{n+1} \neq c_n$).

En projetant $r(t)$ sur $g(t)$ normé on obtient le scalaire : $z_n = c_n\cdot s_n + b_n = c_n\cdot d_n\sqrt{E_b} + b_n$.



$\{c_n\}$ est une suite stationnaire de variables aléatoires (indépendantes) gaussiennes scalaires complexes dont les composantes sont indépendantes et de même loi $\mathcal{N}\left(0,\sigma^2\right)$.

Le module $\rho_n = |c_n|$ suit une loi de Rayleigh telle que $\mathrm{E}\left\{|\rho_n|^2\right\} = \mathrm{E}\left\{|c_n|^2\right\} = 2\sigma^2$

$\{b_n\}$ est une suite stationnaire de variables aléatoires (indépendantes) gaussiennes scalaires complexes dont les composantes sont indépendantes et de même loi $\mathcal{N}\left(0,\frac{N_0}{2}\right)$.

On a $b_n = b_p + jb_q$ avec $\mathrm{E}\left\{|b_p|^2\right\} = \mathrm{E}\left\{|b_q|^2\right\} = \frac{N_0}{2}$ et $\mathrm{E}\left\{|b_n|^2\right\} = N_0$

Donc : $r_n = c_n\cdot s_n + b_n = c_n\cdot d_n\cdot\sqrt{E_b} + b_n$
Pour la MDP-2, l'énergie moyenne par symbole est : $E_s = \mathrm{E}\left\{|s_n|^2\right\} = \mathrm{E}\left\{|d_n|^2\right\}\cdot E_b = E_b$.

Récepteur optimal :

Le récepteur optimal, à probabilité d'erreur minimale (ou au MV puisque les hypothèses $d_n = \pm 1$ sont équiprobables), projette à chaque instant, nT, le signal reçu, z_n, sur l'ensemble des signaux, observés sans bruits, et choisit la plus grande composante.

Comme le canal introduit un cœfficient multiplicatif, le récepteur ne voit plus les formes émises $s_1 = +\sqrt{E_b}$ et $s_2 = -\sqrt{E_b}$ mais les formes $\mu_1 = c_n s_1 = +c_n\sqrt{E_b}$ et $\mu_2 = c_n s_2 = -c_n\sqrt{E_b}$. Le récepteur optimal est donc modifié pour s'adapter à ces formes.

Ceci implique la projection $\mathrm{Re}\left(z_n \cdot c_n^* \sqrt{E_b}\right) = \sqrt{E_b}\,\mathrm{Re}\left(|c_n|^2 d_n + c_n^* b_n\right)$

Equivalente à $|c_n|^2 d_n + \mathrm{Re}\left(c_n^* b_n\right)$.

Comme $d_n = \pm 1$ la règle de décision est $\hat{d}_n = \mathrm{signe}\left(\mathrm{Re}\left(z_n \cdot c_n^*\right)\right)$ pour la MDP-2.

Comme c_n varie lentement d'un symbole à l'autre ce récepteur nécessite l'estimation permanente des c_n.

2) **Performances du canal de Rayleigh** en fonction du S/B moyen :

Le récepteur optimal est identique à celui vu en détection binaire, la probabilité d'erreur sur le symbole estimé est donnée par $\Pr\{Err_s, n\} = \mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{d_n^2}{2N_0}}\right)$,

pour la MDP-2 la distance entre les signaux est : $d_n^2 = \left|+c_n\sqrt{E_b} - \left(-c_n\sqrt{E_b}\right)\right|^2 = 4|c_n|^2 E_b$

soit $\Pr\{Err_b, n\} = \mathrm{Q}\left(\sqrt{2|c_n|^2 \frac{E_b}{N_0}}\right)$

En entrée du récepteur, le rapport signal sur bruit instantané est défini par :

$$\gamma_n = \frac{P_s}{P_b} = \frac{\mathrm{E}\left\{\mu_i^2\right\}}{\mathrm{var}\{b_n\}} = \frac{E_b \cdot |\mathbf{c}_n|^2}{N_0} = |\mathbf{c}_n|^2 \frac{E_b}{N_0}.$$

$\gamma_n = |c_n|^2 \cdot \frac{E_b}{N_0}$, il suit une loi exponentielle $\mathrm{p}_{\gamma_n}(x) = \frac{1}{\gamma} \mathrm{e}^{-\frac{x}{\gamma}} \cdot \mathrm{U}(x)$.

γ est le rapport signal sur bruit moyen : $\gamma = \mathrm{E}\{\gamma_n\} = \frac{2\sigma^2 E_b}{N_0}$

Donc pour la MDP-2 et une détection cohérente : $\Pr\{Err_b, n\} = \Pr\{Err_b / \gamma_n\} = \mathrm{Q}\left(\sqrt{2\gamma_n}\right)$

En moyennant sur les symboles successifs :

$$\Pr\{Err_b\} = \int_0^{\infty} \Pr\{Err_b / \gamma_n = x\} \cdot \mathrm{p}_{\gamma_n}(x)\, dx = \int_0^{\infty} Q\left(\sqrt{2x}\right) \cdot \frac{1}{\gamma} \mathrm{e}^{-\frac{x}{\gamma}}\, dx$$

Intégration par parties : $dv = \frac{1}{\gamma} \mathrm{e}^{-\frac{x}{\gamma}}\, dx \quad \Rightarrow \quad v = -\mathrm{e}^{-\frac{x}{\gamma}}$

$$u = Q\left(\sqrt{2x}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2x}}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{\theta^2}{2}}\, d\theta \quad \Rightarrow \quad du = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x} \frac{dx}{\sqrt{2x}}$$

$$\Pr\{Err_b\} = \int_0^{\infty} Q\left(\sqrt{2x}\right) \cdot \frac{1}{\gamma} \mathrm{e}^{-\frac{x}{\gamma}}\, dx = \left[-Q\left(\sqrt{2x}\right) \mathrm{e}^{-\frac{x}{\gamma}} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x}{\gamma}} \mathrm{e}^{-x} \frac{dx}{\sqrt{2x}}$$

$$\Pr\{Err_b\} = \frac{1}{2} - \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x\left(\frac{1+\gamma}{\gamma}\right)} \frac{dx}{\sqrt{2x}} = \frac{1}{2} - \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x}{\mu^2}} \frac{dx}{\sqrt{2x}} \qquad \text{avec } \mu = \sqrt{\frac{\gamma}{1+\gamma}}$$

en posant $\theta = \frac{\sqrt{2x}}{\mu} \quad \Rightarrow \quad d\theta = \frac{1}{\mu} \frac{dx}{\sqrt{2x}}$

$$\Pr\{Err_b\} = \frac{1}{2} - \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{\theta^2}{2}}\, \mu\, d\theta = \frac{1}{2}(1-\mu) = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{\gamma}{1+\gamma}}\right)$$

Lorsque $1 << \Gamma$: $\mu = \sqrt{\frac{\gamma}{1+\gamma}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\gamma}}} = \left(1+\frac{1}{\gamma}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{\gamma} + \frac{3}{8}\frac{1}{\gamma^2} - \cdots$

$$\Pr\{Err_b\}_{L=1} = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{\gamma}{1+\gamma}}\right) \quad \text{et} \quad \lim_{\gamma \to \infty} \left(\Pr\{Err_b\}_{L=1}\right) = \frac{1}{4}\frac{1}{\gamma}$$

3) **Diversité d'ordre 2 par combinaison de canaux en Réception .**

(equal-gain combining)

On cherche à améliorer les performances de ce système en plaçant deux antennes de réception distantes de quelques longueurs d'onde. Les deux canaux de Rayleigh de cœfficients c_1 et c_2 sont **indépendants** et de même variance $\mathrm{E}\{|c_1|^2\} = \mathrm{E}\{|c_2|^2\} = 2\sigma^2$. Ils sont non dispersifs et les évanouissements sont supposés lents.

Une diversité de réception d'ordre L nécessite L récepteurs indépendants mais ne modifie pas l'émission.

Le symbole MDP-2 reçu sur l'antenne *l* est : $s_l(t) = c_l\, d_n \sqrt{E_b} \cdot g(t)\sqrt{2}\cos\omega_0 t + b_l$

Récepteur optimal, selon le critère du maximum de vraisemblance :

On projette sur $g(t)\sqrt{2}\cos\omega_0 t$ normé :

$$\mathbf{z}_n = \begin{vmatrix} z_{1n} \\ z_{2n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{1n} \cdot d_n\sqrt{E_b} + b_{1n} \\ c_{2n} \cdot d_n\sqrt{E_b} + b_{2n} \end{vmatrix} = \mathbf{c}_n \cdot d_n\sqrt{E_b} + \mathbf{b}_n$$

Formes reçues sans bruit : $\boldsymbol{\mu}_1 = \begin{vmatrix} +c_{1n}\sqrt{E_b} \\ +c_{2n}\sqrt{E_b} \end{vmatrix} = +\mathbf{c}_n\sqrt{E_b}$; $\boldsymbol{\mu}_2 = \begin{vmatrix} -c_{1n}\sqrt{E_b} \\ -c_{2n}\sqrt{E_b} \end{vmatrix} = -\mathbf{c}_n\sqrt{E_b}$

$\mathbf{b}_n$ est un vecteur gaussien complexe de matrice de covariances $\mathbf{R}_b = N_0\,\mathbf{I}_2$.

On a une formulation identique au cas monocapteur, les résultats sont identiques.

Le récepteur optimal projette à chaque instant nT le signal reçu $\mathbf{z}_n$ sur l'ensemble des signaux observés sans bruits $\{\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2\}$ et choisit la plus grande composante :

$$\hat{d}_n = \mathrm{Signe}\left\{\mathrm{Re}\left(\mathbf{c}_n^H \cdot \mathbf{z}_n\right)\right\} = \mathrm{Signe}\left\{\mathrm{Re}\left(c_{1n}^* \cdot z_{1n} + c_{2n}^* \cdot z_{2n}\right)\right\}$$

3-1) **Loi du rapport signal sur bruit E_b / N_0 .**

Le récepteur combine les trajets avec un gain identique, le rapport signal sur bruit instantané avant la prise de décision est le rapport de l'énergie moyenne de la partie signal à la partie bruit de la somme des trajets soit du terme $\mathbf{c}_n^H \mathbf{z}_n = \mathbf{c}_n^H \cdot \left[d_n\sqrt{E_b}\mathbf{c}_n + \mathbf{b}_n\right]$.

Soit : $\gamma_n = \dfrac{\mathrm{E}\left\{ d_n^2 E_b \left(|\mathbf{c}_n|^2 \right)^2 \right\}}{\mathrm{E}\left\{ \left| \mathbf{c}_n^H \mathbf{b}_n \right|^2 \right\}} = \dfrac{\mathrm{E}\left\{ d_n^2 \right\} \left(|\mathbf{c}_n|^2 \right)^2 E_b}{\mathbf{c}_n^H \cdot \mathrm{E}\left\{ \mathbf{b}_n \cdot \mathbf{b}_n^H \right\} \cdot \mathbf{c}_n} = \dfrac{\left(|\mathbf{c}_n|^2 \right)^2 E_b}{\mathbf{c}_n^H \cdot \mathbf{R}_b \cdot \mathbf{c}_n} = \dfrac{\left(|\mathbf{c}_n|^2 \right)^2 E_b}{|\mathbf{c}_n|^2 N_0} = \dfrac{E_b \cdot |\mathbf{c}_n|^2}{N_0}$

Chaque symbole est reçu avec un cœfficient différent soit :

pour un récepteur : $\dfrac{E_b}{N_0} \cdot \left(c_{1n}^2 \right) = \gamma_{1n}$

et pour deux récepteurs : $\gamma_n = \dfrac{E_b}{N_0} \cdot \left(c_{1n}^2 + c_{2n}^2 \right) = \gamma_{1n} + \gamma_{2n}$

Rapport signal sur bruit moyen par récepteur : $\gamma = \mathrm{E}\{\gamma_{1n}\} = \mathrm{E}\{\gamma_{2n}\} = 2\sigma^2 \dfrac{E_b}{N_0}$

Loi de γ_n somme de deux VA indépendantes : $\mathrm{p}_{\gamma_\mathrm{n}}\{x\} = \mathrm{p}\{\gamma_{1n}\} * \mathrm{p}\{\gamma_{2n}\} = \dfrac{x}{\gamma^2} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x}{\gamma}} \cdot \mathrm{U}(x)$

3-2) **Performances du système.**

Le récepteur optimal est identique à celui vu en détection vectorielle, la probabilité d'erreur sur le symbole binaire estimé est donnée par $\Pr\{Err_s, n\} = \mathrm{Q}\left(\sqrt{\dfrac{d_n^2}{2N_0}} \right)$,

pour la MDP-2 la distance entre les signaux est :

$d_n^2 = |\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2|^2 = \left| +\mathbf{c}_n \sqrt{E_b} - \left(-\mathbf{c}_n \sqrt{E_b} \right) \right|^2 = 4 |\mathbf{c}_n|^2 E_b$

soit $\Pr\{Err_b, n\} = \mathrm{Q}\left(\sqrt{2 |\mathbf{c}_n|^2 \dfrac{E_b}{N_0}} \right) = \mathrm{Q}\left(\sqrt{2\gamma_n} \right)$

Donc pour la MDP-2 et une détection cohérente :

$$\Pr\{Err_b / c_n\} = \Pr\{Err_b / \gamma_n\} = \mathrm{Q}\left(\sqrt{2\gamma_n} \right)$$

En moyennant sur les symboles successifs :

$$\Pr\{Err_b\} = \int_0^\infty \Pr\{Err_b / \gamma_n = x\} \cdot \mathrm{p}_{\gamma_\mathrm{n}}(x)\, dx = \int_0^\infty Q\left(\sqrt{2x} \right) \cdot \frac{x}{\gamma^2} \mathrm{e}^{-\frac{x}{\gamma}}\, dx$$

Intégration par parties : $dv = \frac{1}{\gamma^2} e^{-\frac{x}{\gamma}} dx \qquad \Rightarrow \qquad v = -\frac{1}{\gamma} e^{-\frac{x}{\gamma}}$

$$u = x\,Q\left(\sqrt{2x}\right) = \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2x}}^{\infty} e^{-\frac{\theta^2}{2}} d\theta \qquad \Rightarrow \qquad du = Q\left(\sqrt{2x}\right) dx \; - \; \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-x} \frac{dx}{\sqrt{2x}}$$

$$\Pr\{Err_b\} = \left[-xQ\left(\sqrt{2x}\right) e^{-\frac{x}{\Gamma}} \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma} e^{-\frac{x}{\Gamma}} Q\left(\sqrt{2x}\right) dx \; - \; \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma} e^{-\Gamma} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-x} \frac{dx}{\sqrt{2x}}$$

Le premier terme est nul, le deuxième terme est identique à la probabilité d'erreur dans le cas sans diversité : $= \frac{1}{2}(1-\mu)$ avec $\mu = \sqrt{\frac{\gamma}{1+\gamma}}$;

le troisième terme s'obtient en posant : $\theta = \frac{\sqrt{2x}}{\mu} \qquad \Rightarrow \qquad d\theta = \frac{1}{\mu} \frac{dx}{\sqrt{2x}}$

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{\gamma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{\mu^2}} \frac{dx}{\sqrt{2x}} = \frac{\mu}{\gamma} \frac{\mu^2}{2} \int_0^{\infty} \theta^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\theta^2}{2}} d\theta = \frac{\mu}{\gamma} \frac{\mu^2}{2} \frac{1}{2}$$

moment d'ordre 2 de la loi $\mathcal{N}(0,1)$

$$\Pr\{Err_b\} = 0 + \int_0^{\infty} \frac{1}{\gamma} e^{-\frac{x}{\gamma}} Q\left(\sqrt{2x}\right) dx - \int_0^{\infty} \frac{1}{\gamma} e^{-\frac{x}{\gamma}} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-x} \frac{dx}{\sqrt{2x}}$$

$$\Pr\{Err\} = 0 + \frac{1}{2}(1\text{-}\mu) - \frac{\mu}{\left(\frac{\mu^2}{1-\mu^2}\right)} \frac{\mu^2}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1\text{-}\mu) - \mu\left(\frac{1-\mu^2}{4}\right) \quad \text{avec} \quad \mu = \sqrt{\frac{\gamma}{1+\gamma}}$$

à comparer à la transmission sur un seul canal avec même E_s et même S/B moyen en entrée du récepteur , $\mu = \sqrt{\frac{\gamma}{1+\gamma}} = \left(1+\frac{1}{\gamma}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(1 - \frac{1}{2}\frac{1}{\gamma} + \frac{3}{8}\frac{1}{\gamma^2} - \cdots\right)$:

$$\Pr\{Err_b\}_{L=1} = \frac{1}{2}(1-\mu) ; \qquad \underset{L=2,\ \text{e-g comb}}{\Pr\{Err_b\}} = \frac{1}{2}(1\text{-}\mu) - \mu\left(\frac{1-\mu^2}{4}\right)$$

Valeur asymptotique lorsque $S/B = \gamma >> 1$, développement au 2 ième ordre

$$\mu^2 = \left(1+\frac{1}{\gamma}\right)^{-1} = 1-\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma^2}-\cdots$$

$$\mu\left(\frac{1-\mu^2}{4}\right) = \left(1-\frac{1}{2}\frac{1}{\gamma}+\frac{3}{8}\frac{1}{\gamma^2}-\cdots\right)\left(+\frac{1}{4}\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{4}\frac{1}{\gamma^2}+\cdots\right) = +\frac{1}{4}\frac{1}{\gamma}-\frac{3}{8}\frac{1}{\gamma^2}+\cdots$$

$$\lim_{\gamma\to\infty}\left(\Pr\{Err_b\}_{L=1}\right) = \frac{1}{4\gamma} \qquad \text{et} \qquad \lim_{\gamma\to\infty}\left(\underset{L=2,\text{ e-g comb}}{\Pr\{Err_b\}}\right) = \frac{3}{16}\frac{1}{\gamma^2}$$

La probabilité d'erreur décroît plus vite que dans le cas sans diversité

4) **Diversité de réception par sélection de trajet.** (selection or switching)

Une autre technique, qui utilise la diversité des affaiblissements de plusieurs canaux indépendants, consiste sélectionner, à chaque échantillon, la sortie du récepteur le plus puissant pour réaliser la détection.

L'estimation des $|c_{ln}|^2$ permet de déterminer le récepteur le plus puissant, la détection se fait alors sur la voie correspondante. A chaque échantillon n le récepteur peut changer de voie.

La probabilité d'erreur instantanée est : $\Pr\{Err_b, n\} = \Pr\{Err_b / \gamma_{ln}\} = Q\left(\sqrt{2\gamma_{ln}}\right)$

La probabilité d'erreur moyenne au cours du temps s'obtient en considérant la variable $\gamma_n = \sup(\gamma_{ln})$, stationnaire dans le temps comme les γ_{ln} ces derniers étant indépendants.

Probabilité d'erreur moyenne : $\Pr\{Err_b\} = \int_{-\infty}^{\infty} \Pr\{Err_b / \gamma_n = x\} \cdot \mathrm{p}_{\gamma_n}(x)\, dx$

Loi de $\gamma_n = \sup(\gamma_{nl})$:

$$\mathrm{F}_{\gamma_n}(x) = \Pr(\gamma_n < x) = \Pr\left(\sup(\gamma_{nl}) < x\right) = \prod_{l=1}^{L} \Pr(\gamma_{nl} < x),$$

car les variables sont indépendantes et de même loi : $\mathrm{F}_{\gamma_n}(x) = \left(\mathrm{F}_{\gamma_{nl}}(x)\right)^L$

densité : $\mathrm{p}_{\gamma_n}(x) = L \cdot \left(\mathrm{F}_{\gamma_{nl}}(x)\right)^{L-1} \cdot \mathrm{p}_{\gamma_{nl}}(x)$ avec $\mathrm{p}_{\gamma_{nl}}(x) = \frac{1}{\gamma} \mathrm{e}^{-\frac{x}{\gamma}} \cdot \mathrm{U}(x)$; $\forall l, n$

D'où pour $L = 2$:

$$\Pr\{Err_b\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pr\{Err_b / \gamma_n = x\} \cdot \mathrm{p}_{\gamma_n}(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} Q\left(\sqrt{2x}\right) \cdot 2 \left(\int_{-\infty}^{x} \mathrm{p}_{\gamma_{nl}}(y)\, dy \right)^1 \cdot \mathrm{p}_{\gamma_{nl}}(x)\, dx$$

$$\Pr\{Err_b\} = \frac{2}{\gamma} \int_0^{\infty} Q\left(\sqrt{2x}\right) \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{\gamma}}\right) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x}{\gamma}}\, dx$$

Par parties $\Rightarrow$ $\underset{L=2,\ \text{sélec}}{\Pr\{Err_b\}} = \left(1 - \sqrt{\frac{\gamma}{1+\gamma}}\right) - \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{\gamma}{2+\gamma}}\right)$

4-1) **Valeur asymptotique.**

Valeur asymptotique lorsque $S/B = \gamma >> 1$, développement au 2 ième ordre

$$\sqrt{\frac{\gamma}{2+\gamma}} = \left(1 + \frac{2}{\gamma}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(1 - \frac{1}{2}\frac{2}{\gamma} + \frac{3}{8}\frac{4}{\gamma^2} - \cdots\right)$$

$$\lim_{\gamma \to \infty} \left(\Pr\{Err_b\}\right) = \left(+\frac{1}{2}\frac{1}{\gamma} - \frac{3}{8}\frac{1}{\gamma^2} + \cdots\right) - \frac{1}{2}\left(+\frac{1}{2}\frac{2}{\gamma} - \frac{3}{8}\frac{4}{\gamma^2} + \cdots\right)$$

$$\lim_{\gamma \to \infty} \left(\underset{L=2,\ \text{sélec}}{\Pr\{Err_b\}} \right) = \frac{3}{8\gamma^2}$$

Le doubl

$$\lim_{\gamma \to \infty} \left(\Pr\{Err_b\}_{L=1}\right) = \frac{1}{4\gamma} \qquad \text{et} \qquad \lim_{\gamma \to \infty} \left(\underset{L=2,\ \text{e-g comb}}{\Pr\{Err_b\}} \right) = \frac{3}{16}\frac{1}{\gamma^2}$$

Comparaison. Quelle est la perte en performances.

En diversité de réception (cohérente optimale) simultanée on avait $\Pr\{Err\} = \frac{3}{16\gamma^2}$, pour obtenir la même probabilité d'erreur dans le cas de sélection du récepteur le plus puissant il faut multiplier Γ par $\sqrt{2}$

Soit une perte de : $10 \cdot \log_{10} \sqrt{2} = 1.5$ dB

5) Diversité d'émission.

On essaie de réaliser une diversité d'émission. Quel est le rapport signal à bruit en réception.

On considère une diversitée dans le temps qui peut être vue comme un codage répétitif $(L,1)$ suivi d'un entrelacement pour séparer les bits dans le temps, au delà du temps de cohérence du canal, de façon à ce que les canaux soient indépendants.

Une diversité d'émission, d'ordre L, dans le temps, multiplie le débit symbole par L. La forme $g'(t)$ est de durée L fois plus courte que $g(t)$. On choisit toujours $g'(t)$ normé.

Le signal MDP-2 émis sur chaque chip ou canal est de la forme :

$$s(t) = d_n \sqrt{E_c} \cdot g'(t) \sqrt{2} \cos \omega_0 t$$

L'énergie émise sur chaque chip est $E_c = \frac{E_b}{L} = \frac{E_b}{2}$ si $L = 2$ canaux.

L'énergie moyenne par symbole émis $E_s = E_b$ est alors conservée.

Pour conserver la même énergie moyenne par symbole que dans le cas d'un seul canal, on émet simultanément le chip $s_{nl} = \frac{d_n \sqrt{E_b}}{\sqrt{2}} = \frac{s_n}{\sqrt{2}}$ sur chacun des deux canaux.

Il y a un seul récepteur et on recombine (ajoute) les chips des différents canaux, le signal reçu est vectoriel. En équivalent BdB sur chaque canal, on projette sur $g'(t)$ normé :

$$\mathbf{z}_n = \left| \begin{matrix} z_{1n} \\ z_{2n} \end{matrix} \right. = \left| \begin{matrix} c_{1n} \cdot d_n \sqrt{E_c} + b_{1n} \\ c_{2n} \cdot d_n \sqrt{E_c} + b_{2n} \end{matrix} \right. = \mathbf{c}_n \cdot d_n \sqrt{E_c} + \mathbf{b}_n$$

Formes reçues sans bruit : $\boldsymbol{\mu}_1 = \left| \begin{matrix} +c_{1n}\sqrt{E_c} \\ +c_{2n}\sqrt{E_c} \end{matrix} \right. = +\mathbf{c}_n \sqrt{E_c}$; $\boldsymbol{\mu}_2 = \left| \begin{matrix} -c_{1n}\sqrt{E_c} \\ -c_{2n}\sqrt{E_c} \end{matrix} \right. = -\mathbf{c}_n \sqrt{E_c}$

$\mathbf{b}_n$ est un vecteur gaussien complexe de matrice de covariances $\mathbf{R}_b = N_0 \mathbf{I}_2$.

Le rapport signal sur bruit instantané en entrée du récepteur est le rapport de l'énergie moyenne des signaux utiles sur l'énergie moyenne de bruit, du ou des canaux, évalué sur la durée du symbole. Chaque symbole est reçu avec un cœfficient différent soit :

$$\gamma_n = \frac{\mathrm{E}\left\{ \left| \boldsymbol{\mu}_i \right|^2 \right\}}{\mathrm{E}\left\{ \left| \mathbf{b}_n \right|^2 \right\} / L} = \frac{E_c \cdot \left| \mathbf{c}_n \right|^2}{L N_0 / L}$$ pour le même bruit sur chaque canal.

Et pour deux canaux : $\gamma_n = \frac{E_c}{N_0} \cdot \left(c_{1n}^2 + c_{2n}^2 \right) = \gamma_{1n} + \gamma_{2n}$

Rapport signal sur bruit moyen par trajet : $\gamma_c = \mathrm{E}\{\gamma_{1n}\} = \mathrm{E}\{\gamma_{2n}\} = 2\sigma^2 \frac{E_c}{N_0}$

On est dans le même cas qu'en diversité de réception avec combinaison des trajets mais l'énergie par chip est plus faible. $\gamma_c = \gamma / L$.

Loi de γ_n somme de deux VA indépendantes : $\mathrm{p}_{\gamma_\mathrm{n}}\{x\} = \mathrm{p}\{\gamma_{1n}\} * \mathrm{p}\{\gamma_{2n}\} = \frac{x}{\gamma_c^2} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x}{\gamma_c}} \cdot \mathrm{U}(x)$

La détection binaire de la MDP-2 est : $\hat{d}_n = \mathrm{signe}\left\{ \mathrm{Re}\left(z_n \cdot c_n^* \right) \right\}$.

5-1) Performances.

Le récepteur optimal est identique à celui vu en détection vectorielle, la probabilité d'erreur sur le symbole estimé est donnée par $\Pr\{Err_s, n\} = Q\left(\sqrt{\frac{d_n^2}{2N_0}} \right)$,

pour la MDP-2 la distance entre les signaux est :

$$d_n^2 = |\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2|^2 = \left| +\mathbf{c}_n \sqrt{E_c} - \left(-\mathbf{c}_n \sqrt{E_c} \right) \right|^2 = 4 |\mathbf{c}_n|^2 E_c$$

soit $\Pr\{Err_b, n\} = \mathrm{Q}\left(\sqrt{2|\mathbf{c}_n|^2 \frac{E_c}{N_0}} \right) = \mathrm{Q}\left(\sqrt{2\gamma_n} \right)$

Donc pour la MDP-2 et une détection cohérente : $\Pr\{Err_b, n\} = \Pr\{Err_b / \gamma_n\} = \mathrm{Q}\left(\sqrt{2\gamma_n} \right)$

En moyennant sur les symboles successifs :

$$\Pr\{Err_b\} = \int_0^\infty \Pr\{Err_b / \gamma_n = x\} \cdot \mathrm{p}_{\gamma_\mathrm{n}}(x) \; dx = \int_0^\infty Q\left(\sqrt{2x} \right) \cdot \frac{x}{\gamma_c^2} \mathrm{e}^{-\frac{x}{\gamma_c}} \, dx$$

On a la même formule qu'en ***3)*** avec $\gamma_c = \frac{\gamma}{2}$ à la place de γ.

$$\underset{L=2,\ \text{temps}}{\Pr\{Errb\}} = \frac{1}{2}(1-\mu_c) - \mu_c \left(\frac{1-\mu_c^2}{4} \right) \qquad \text{avec } \mu_c = \sqrt{\frac{\gamma_c}{1+\gamma_c}}$$

$$\lim_{\gamma_c \to \infty} \left(\underset{L=2,\ \text{temps}}{\Pr\{Errb\}} \right) = \frac{3}{16} \frac{1}{\gamma_c^2} = \frac{3}{4} \frac{1}{\gamma^2}$$

La probabilité d'erreur est 4 fois plus forte que dans le cas de la diversité de réception, ceci est dû au fait que dans ce cas l'énergie reçue est plus importante.

$$\lim_{\gamma\to\infty}\left(\Pr_{L=1}\{Err_b\}\right)=\frac{1}{4\gamma} \quad \& \quad \lim_{\gamma\to\infty}\left(\Pr_{L=2,\text{ sélec}}\{Err_b\}\right)=\frac{3}{8\gamma^2} \quad \& \quad \lim_{\gamma\to\infty}\left(\Pr_{L=2,\text{ e-g comb}}\{Err_b\}\right)=\frac{3}{16\gamma^2}$$

$$\& \quad \lim_{\gamma\to\infty}\left(\Pr_{L=2,\text{ temps}}\{Errb\}\right)=\frac{3}{4}\frac{1}{\gamma^2}$$

La probabilité d'erreur décroît toujours plus vite que dans le cas sans diversité.

***6)* Symboles décalés.**

On a une idée saugrenue, on décale un signal de la durée d'un symbole.

5.3 OFDM sur Canal Dispersif.

On considère des voies de données, au débit de 100 kbit/s, à transmettre sur un canal dispersif.
Ce canal présente un temps de dispersion $T_{disp}=1\mu s$ et un temps de cohérence $T_{coh}=10\,\text{ms}$.

On réalise un multiplex OFDM de N porteuses orthogonales, de fréquences $f=f_0+n\Delta f$ pour $n=1,2,...,N$ et $f_0=1\text{GHz}$. Les porteuses sont modulées MAQ-4.

1. Quelles sont les conditions d'orthogonalités des porteuses ?

Voir cours $f_0=k/T_s$

2. Quel est l'étalement Doppler du canal ? Quelle est la largeur de sa bande de cohérence?

$B_{dop}\approx 1/T_{coh}=100\,\text{Hz}$ $B_{coh}\approx 1/T_{disp}=1\text{MHz}$

On décide de prendre des symboles d'une durée $T_s=10\cdot T_{disp}$ et un écartement en fréquence $\Delta f=1/T_s$ pour un multiplex de 50 porteuses en cosinus.

3. Quel est le nombre maximal de voies de données qu'on peut transmettre avec ce système ?

MAQ-4 permet 2 bits par symbole et N porteuses modulées MAQ-4 permettent $2N$ bits par symbole soit ici 100 bit/symb.

$T_s = 10x10^{-6} = 10\,\mu s \Rightarrow D_s = 100\,kbit/s \Rightarrow D_b = 100 D_s = 10\,Mbit/s$

Soit ici 100 voies de données.

4. Quelle est la largeur de bande utile ?

$$\Delta f = 1/T_s = 1/(10x10^{-6}) = 100\,kHz \Rightarrow B_{tot} \approx 5\,MHz$$

5. Si l'on veut faire de la diversité en fréquence quel est l'espacement minimal entre deux porteuses transportant la même information?

$$\text{écart} > B_{coh} \approx 1/T_{disp} = 1\,MHz$$

On choisit de faire de la diversité dans le temps mettant un seul codeur linéaire en bloc, codeur de Golay (23,12,7), et un entrelacement des bits codés.

6. Quel est le nombre maximal de voies de données qu'on peut transmettre avec ce système ?

Un seul codeur nécessite un prémultiplexage temporel des voies de données. Le rendement du codeur est de 12/23 on divise donc le nombre de voies par deux, soit 52 voies.

7. Quel est l'écart temporel nécessaire entre deux bits d'un même mot de code pour réaliser la diversité entre ces bits ? $\text{écart} > T_{coh} \approx 1/B_{dop} = 10\,ms$

Le débit étant conservé cela correspond à 100000 bits.

8. Quelle doit être la dimension de l'entrelaceur ? 100000x23

9. Quel est le nombre d'erreurs que peut corriger le codeur ? $(d_{\min} - 1)/2 = 3$

10. Quelle est la structure complète (du signal reçu aux voies restituées) du récepteur optimal cohérent ?

Filtre adapté pour chaque voie porteuse/MAQ-4 détection des bits, démultiplexage OFDM des voies de porteuses, désembrouillage, décodage, démultiplexage temporel des voies de données.

5.4 Diversité de Réception.

On considère l'émission MDP-2 (1Mbit/s, 1Watt) sur un canal de Rayleigh. La réception est faite par trois antennes (i=1,2,3), suffisamment espacées, et le récepteur est optimal.
Le fading est lent, le BABG est le même sur les trois voies ($N_0 = -180$dBW/Hz) et les affaiblissements instantanés $c_{i,n}$ suivent la même loi gaussienne complexe de composantes $\mathcal{N}\left(0, \sigma^2 = -100\text{dB}\right)$.

1) Donner la structure du récepteur optimal au minimum de probabilité d'erreur.

Voir poly cours

2) Quel est le rapport signal à bruit moyen γ d'un canal, valeur littérale et numérique ?

γ est le rapport signal sur bruit moyen : $\gamma = \mathrm{E}\{\gamma_n\} = \dfrac{2\sigma^2 E_b}{N_0}$

$\gamma_{\text{dB}} = 3 - 100 - 60 + 180 = 23\text{dB}$

3) Quelle est la probabilité pour qu'un au moins des trois canaux présente un S/B instantané $\gamma_{i,n}$ supérieur à 13dB ?

$$\Pr\{\exists \gamma_{i,n} > \gamma/10\} = 1 - \Pr\{\gamma_{1,n} \,\&\, \gamma_{2,n} \,\&\, \gamma_{3,n} < \gamma/10\} = 1 - \left(\Pr\{\gamma_{i,n} < \gamma/10\}\right)^3 \approx 1 - 10^{-3}$$

car les canaux sont indépendants et identiques et que :

$$\Pr\{\gamma_{i,n} < \alpha\} = \int_0^{\alpha} \frac{e^{-x/\gamma}}{\gamma} dx = 1 - e^{-\alpha/\gamma} \;; \quad \Pr\{\gamma_{i,n} < \gamma/10\} = 1 - e^{-0.1} \approx 0.1$$

4) Etablir la loi du rapport signal à bruit instantané γ_n de l'ensemble.

pour trois récepteurs : $\gamma_n = \dfrac{E_b}{N_0} \cdot \left(c_{1n}^2 + c_{2n}^2 + c_{3n}^2\right) = \gamma_{1n} + \gamma_{2n} + \gamma_{3n}$

Loi de γ_n somme de trois VA indépendantes :

$$\mathrm{p}_{\gamma_n}\{x\} = \mathrm{p}\{\gamma_{1n}\} * \mathrm{p}\{\gamma_{2n}\} * \mathrm{p}\{\gamma_{3n}\} = \frac{x^{L-1}}{(L-1)!\gamma^L} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x}{\gamma}} \cdot \mathrm{U}(x), \quad L = 3 .$$

5) Quelles sont alors les probabilités d'erreur, par bit, instantanée et moyenne ?

MDP2 détection cohérente : $\Pr\{Err_b, n\} = \mathrm{Q}\left(\sqrt{2|\mathbf{c}_n|^2 \dfrac{E_b}{N_0}}\right) = \mathrm{Q}\left(\sqrt{2\gamma_n}\right)$

Proba moyenne : $\Pr\{Err_b\} = \int_0^{\infty} \Pr\{Err_b / \gamma_n = x\} \cdot \mathrm{p}_{\gamma_n}(x)\, dx = \int_0^{\infty} Q\left(\sqrt{2x}\right) \cdot \frac{x^2}{2\gamma^3} \mathrm{e}^{-\frac{x}{\gamma}} dx$

6) Comparer alors la probabilité d'erreur moyenne au cas sans diversité, valeurs numériques.