Institut National des Télécommunications 3 mai 2001

MO21 — contrôle de connaissances écrit 2

Durée : 2 heures Tous documents distribués en cours autorisés

---

Exercice 1 : Problème du sac à dos (Knapsack Problem)

Un randonneur dispose d'un ensemble **X** de n objets qu'il se propose de charger dans son sac à dos. Chaque objet est caractérisé par un poids w_i et un intérêt c_i représentant son utilité. Il se fixe un poids total b à ne pas dépasser et cherche à déterminer un sous-ensemble $\mathbf{Y} \subset \mathbf{X}$ d'objets qui **maximise** l'intérêt total de la cargaison.

Si on associe à chaque objet i une variable bivalente x_i qui prend la valeur 1 si l'objet fait partie de la cargaison, la valeur 0 sinon, on peut formuler le problème de la façon suivante :

Maximiser la fonction : $z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$
sous la contrainte : $w_1 x_1 + w_2 x_2 + \ldots + w_n x_n \leq b$

L'algorithme trivial d'énumération consiste à évaluer tous les sous-ensembles $\mathbf{Y} \subset \mathbf{X}$ et à retenir parmi ceux-ci celui (ou un de ceux) qui maximise la fonction z en respectant la contrainte globale de poids. Cette méthode trouve très rapidement ses limites. En effet le nombre de sous-ensembles **Y** est égal à 2^n. On ne peut traiter de cette manière que des problèmes de très petites tailles.

① Rechercher l'optimum du problème suivant par énumération :

$$z = 10 x_1 + 6 x_2 + 5 x_3$$
$$6 x_1 + 4 x_2 + 4 x_3 \leq 9$$

On reconnaît dans le problème du sac à dos un programme linéaire monocontrainte. Cependant il doit être résolu en variables bivalentes et non en variables réelles. Si les variables étaient réelles, on pourrait employer l'algorithme du simplexe.

Peut-on plonger un espace de variables bivalentes $\{0, 1\}$ de n variables dans $\Re^n$, puis considérer la solution optimale obtenue comme une approximation de la solution optimale dans le cas bivalent ?

② Pour répondre à cette question, on appliquera la méthode du simplexe à l'exemple de la question 1.

③ Comparer à la solution optimale. Qu'en déduisez-vous ?

④ Montrer que dans le cas général, la résolution dans $\Re^n$ appliquée à ce problème conduira à annuler toutes les variables sauf une. Quand est-il possible que plusieurs variables soient non nulles à l'optimum ?

Les méthodes approchées sont fondées sur une idée de bon sens mais ne garantissent absolument pas de trouver une solution optimale. Dans le cas du problème du sac à dos, l'intuition la plus immédiate est de choisir en priorité les objets qui ont un intérêt important pour un poids petit. Voici l'heuristique la plus connue pour ce problème. C'est un algorithme glouton qui construit de manière itérative une solution sans remettre en cause les choix faits dans le passé.

```
Trier les objets suivant les ratios ci/wi décroissants.
      c1/w1 ≥ c2/w2 ≥  … ≥ cn/wn

xi ← 0 i = 1, ..., n
W ← 0   // poids du sac initialisé à zéro
i ← 1   // Les objets sont évalués suivant leur ratio
        // ci/wi décroissants
terminé ← FAUX

tant que terminé = FAUX faire
      si W + wi ≤ b alors
            xi ← 1
            W ← W + wi
            i ← i + 1
      sinon
           terminé ← VRAI
      fsi
ftq
```

⑤ Quelle est la solution obtenue par cette méthode pour l'exemple de la question 1 ?

⑥ comparer avec la solution optimale.

Malgré ses défauts, on décide d'employer l'algorithme précédent pour donner une solution qui sera améliorée avec une recherche taboue. Pour mettre en oeuvre cette méthode, on a besoin de transformer le problème de telle façon qu'il soit non contraint. Pour cela, on va au plus simple dans le cadre de cette étude : toute solution qui viole au moins une contrainte reçoit la valeur objectif 0 (death penalty method) .

⑦ Définir un espace de solutions pour une recherche taboue appliquée au problème du sac à dos.

⑧ Définir un voisinage pour toute solution appartenant à cet espace.

Pour chaque solution obtenue à l'étape *t*, on choisira la meilleure solution voisine non taboue à l'étape *t*+1. S'il existe des solutions voisines de valeurs objectifs identiques, on choisira un ordre d'exploration déterministe à définir.

⑨ Construire un algorithme de recherche taboue pour le problème du sac à dos.

⑩ Décrire le déroulement de quelques étapes de votre algorithme pour l'exemple présenté question 1, à partir de la solution initiale obtenue question 5.

Exercice 2 : recherche d'un circuit hamiltonien

Soit un graphe de 5 sommets {o, a, b, c, d }, dont la matrice d'adjacence est donnée ci-dessous :

	o	a	b	c	d
o:	∞	3	7	9	4
a:	2	∞	4	5	4
b:	8	6	∞	∞	3
c:	5	3	∞	∞	4
d:	∞	5	2	7	∞

Trouver un ou plusieurs circuits hamiltoniens dans ce graphe à l'aide de l'algorithme de Little. Si le temps vous manque, essayez de faire au moins 4 réductions de la matrice d'adjacence.