Institut National des Télécommunications 9 février 2007

MO21 — contrôle de connaissances écrit

Durée : 1 heure 30 mn Tous documents distribués en cours autorisés

---

Exercice 1 (14 pts)

Soit le programme linéaire suivant :
Minimiser $z = -2x + y$
Sous les contraintes :

$$\begin{aligned} x - 3y &\leq -3 \\ 2x - y &\leq 4 \\ x + y &\leq 8 \end{aligned}$$

avec $x \geq 0$ et $y \geq 0$.

Question 1.1 : mettre le programme linéaire sous forme standard (4 pts)

Question 1.2 : effectuer 2 étapes de normalisation-réduction (4 pts)

Question 1.3 : interprétation des résultats, dire si le critère d'arrêt est vérifié (2 pts)

Question 1.4 : on considère maintenant le même programme linéaire avec une fonction objective légèrement modifiée comme suit :

$$z' = -2(1 + \varepsilon)x + y$$

où $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$ arbitrairement petit.
Résoudre le programme linéaire et interpréter les résultats. (2 pts)

Question 1.5 : comparer les résultats obtenus « question 1.3 » et ceux obtenus « question 1.4 ». Que constatez-vous ? Expliquer en vous aidant si besoin d'un graphique. (2 pts)

Exercice 2 (6 pts)

En génétique moléculaire, il est souvent utile de pouvoir quantifier le degré de similarité entre deux brins d'ADN. Cela revient à calculer une distance entre deux chaînes de symboles. La distance de Levenstein $d_l(a, b)$ compte le nombre minimal de modifications nécessaires à apporter à une chaîne a pour obtenir une chaîne b. Une modification peut être la suppression d'un symbole de a, l'insertion d'un symbole de b dans a, ou le remplacement d'un symbole de a par un symbole de b, en respectant l'ordre des symboles dans les chaînes a et b

Question 2.1 : exprimer la distance de Levenstein entre une chaîne vide et une chaîne de i symboles. (1 pt)

Question 2.2 : soit a_i la sous chaîne de longueur i de a, vide si $i = 0$ ou sinon contenant les symboles d'index 1 à i de a. En faisant l'hypothèse qu'on a pu calculer $d_l(a_{i-1}, b_j)$, $d_l(a_i, b_{j-1})$ et $d_l(a_{i-1}, b_{j-1})$, exprimer $d_l(a_i, b_j)$ selon que les symboles d'index i de a et j de b sont identiques ou différents et en considérant les trois cas : suppression d'un symbole, insertion et remplacement. (2 pts)

Question 2.3 : calculer la distance entre les chaînes « zeste » et « test » en utilisant les résultats obtenus aux questions 2.1 et 2.2. Indication : construire le tableau bidimensionnel des $d_l(a_i , b_j)$. (2 pts)

Question 2.4 : à quel type de méthode d'optimisation appartient la méthode que vous avez élaborée pour calculer la distance de Levenstein ? (1 pt)