MO21 21 CCE1 2006-2007

Exercice 1

Minimiser z = -2x + y
sous les contraintes :

$$\begin{aligned} x - 3y &\le -3 \\ 2x - y &\le 4 \\ x + y &\le 8 \end{aligned}$$

1.1 Mise sous forme standard

Second membre positif :

$$\begin{aligned} -x + 3y &\ge 3 \\ 2x - y &\le 4 \\ x + y &\le 8 \end{aligned}$$

Variables d'écart :

$$\begin{aligned} -x + 3y - x3 &= 3 \\ 2x - y + x4 &= 4 \\ x + y + x5 &= 8 \\ -2x + y &= z \end{aligned}$$

Variables artificielles :

$$\begin{aligned} -x + 3y - x3 + x6 &= 3 \\ 2x - y + x4 &= 4 \\ x + y + x5 &= 8 \\ -2x + y + M\,x6 &= z \end{aligned}$$

Combinaison linéaire :

$$\begin{aligned} -x + 3y - x3 + x6 &= 3 \\ 2x - y + x4 &= 4 \\ x + y + x5 &= 8 \\ (-2+M)x + (1-3M)y + M\,x3 &= z \end{aligned}$$

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	
6	-1	3	-1	0	0	1	3
4	2	-1	0	1	0	0	4
5	1	1	0	0	1	0	8
	-2+M	1-3M	M	0	0	0	-3M

1.2 Deux étapes de normalisation réduction

Pivot : A(1,2) = 3

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	
2	-1/3	1	-1/3	0	0	1/3	1
4	5/3	0	-1/3	1	0	1/3	5
5	4/3	0	1/3	0	1	-1/3	7
	-5/3	0	1/3	0	0	-1/3+M	-1

==========

Etape 2 : pivot : A(2,1) = 5/3

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	
2	0	1	-2/5	1/5	0	2/5	2
1	1	0	-1/5	3/5	0	1/5	3
5	0	0	3/5	-4/5	1	-3/5	3
	0	0	0	1	0	M	4

1.3 Interprétation et critère d'arrêt

Z = -4, X1 = 3, X2 = 2, X3 = 0, X4 = 0, X5 = 3, X6 = 0
Le critère d'arrêt est vérifié : les coefficients du gradient sont ≥ 0

1.4 Minimiser z' = -2(1+e)x + y

sous les contraintes :

$$x - 3y \leq -3$$
$$2x - y \leq 4$$
$$x + y \leq 8$$

X1	X2	X3	X4	X5	X6		
6	-1	3	-1	0	0	1	3
4	2	-1	0	1	0	0	4
5	1	1	0	0	1	0	8
	-2-2e+M	1-3M	M	0	0	0	-3M

==========

Etape : 1
Pivot : A(1,2) = 3

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	
2	-1/3	1	-1/3	0	0	1/3	1
4	5/3	0	-1/3	1	0	1/3	5
5	4/3	0	1/3	0	1	-1/3	7
	-5/3-2e	0	1/3	0	0	-1/3+M	-1

==========

Etape : 2
Pivot : A(2,1) = 5/3

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	
2	0	1	-2/5	1/5	0	2/5	2
1	1	0	-1/5	3/5	0	1/5	3
5	0	0	3/5	-4/5	1	-3/5	3
	0	0	-2e/5	1+6e/5	0	2e/5+M	4+6e

==========

Etape : 3
Pivot : A(3,3) = 3/5

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	
2	0	1	0				4
1	1	0	0				4
3	0	0	1				5
	0	0	0	1+2e/3	2e/3	M	4+8e

==========

1.5 Comparaisons

Z = -4-8e, X1 = 4, X2 = 4, X3 = 5, X4 = 0, X5 = 0, X6 = 0
Par rapport aux résultats de la question 1.3, les valeurs de X1 et X2 sont éloignées pour des valeurs de Z arbitrairement proches. Il y a dégénérescence.

Exercice 2

2.1 Distance de Levenstein entre une chaine a vide et une chaine b de i symboles : $d_l(a, b) = d_l(b, a) = i$

2.2 Relation de récurrence

$$d_l(a_i, b_j) = \min(d_l(a_{i-1}, b_j) + 1, d_l(a_i, b_{j-1}) + 1, d_l(a_{i-1}, b_{j-1}) + \delta(a_i, b_j))$$

où $\delta(a_i, b_j) = 0$ si les symboles d'index i de a et j de b sont identiques
$= 1$ si les symboles d'index i de a et j de b sont différents

2.3 Distance entre "zeste" et "test"

		z	e	s	t	e
	0	1	2	3	4	5
t	1	1	2	3	3	4
e	2	2	1	2	3	4
s	3	3	2	1	2	3
t	4	4	3	2	1	2

$\Rightarrow d_l(\text{"zeste"}, \text{"test"}) = 2$

2.4 Méthode d'optimisation : programmation dynamique car le calcul de l'optimum est obtenu par récurrence.