Eléments de réponse au contrôle de connaissances d'OG21
(session principale 2006/2007)

Ex1 :
On ordonne les arêtes du graphe dans un ordre croissant selon leurs poids et on les sélectionne dans cet ordre en éliminant celles qui forment un cycle avec les arêtes précédemment sélectionnées.

Ainsi on sélectionne dans cet ordre les arêtes (E,F), (C,D), (E,D) puis on rejette l'arête (F,D) qui forme un cycle avec les arêtes précédentes. Enfin, on sélectionne les arêtes (B,D) et (A,C). Le poids total de l'arbre est 17.

Ex3 :
Question 1/
L'algorithme de Moore-Dijkstra s'applique dans le cas où les poids sont positifs et le graphe est orienté. Nous avons ici un graphe non orienté qu'il est aisé de voir comme un graphe orienté symétrique où on remplace chaque arête du graphe initial par deux arcs opposés ayant le même poids que l'arête initiale.

A	B	C	D	E	F
0 - A	∞	∞	∞	∞	∞
	14 - A	6 -A	**4 - A**	7 - A	15 - A
	9 - D	**6 - A**		7 - A	12 - D
	9 - D			**7 - A**	12 - D
	9 - D				12 - D
					11 - B

Le tableau précédent récapitule les différentes étapes de l'algorithme. Les pivots de chaque itération sont soulignés par un trait. Une chaîne optimale est donnée par les arêtes (A,D), (D,B), (B,F). Cette chaîne s'obtient évidemment en utilisant le vecteur « père » associé aux sommets du graphe. Il n'est pas difficile de voir que d'autres chaînes optimales existent maisnous avons besoin juste d'une seule !

Question 2/
L'arête (D,B) fait partie d'une plus courte chaine (celle qu'on vient de déterminer). Si son poids diminue, il est évident que cette chaîne sera toujours optimale.

Si on n'a pas eu la chance de tomber sur la chaîne (A,D), (D,B), (B,F) dans la première question, alors on devrait réappliquer l'algorithme avec un poids légèrement faible et on obtiendrait la chaîne (A,D), (D,B), (B,F) comme plus courte chaîne.

Ex2 :

Question 1/

On observe que le graphe contient des sommets B-C, B-D etc. représentant les types de rencontres possibles. Un sommet source s a également été rajouté et relié à ces sommets. La capacité de chaque arc reliant s à un sommet représentant un type de rencontres est égale aux nombre de rencontres de ce type qui devraient avoir lieu jusqu'à la fin du championnat. On observe également que des sommet B, C etc font partie du graphe. Ils représentent les équipes autres que A. Chaque type de rencontres (par exemple B-C) est relié par un arc à chacune des équipes qui prennent part à la rencontre (B et C dans notre exemple). Les capacités de ces arcs sont infinies ce qui revient à dire qu'il n y a pas de limitation particulière introduite à ce niveau.

Enfin, on observe qu'un sommet t a été ajouté et que des arcs relient les équipes à ce sommet. On peut également remarquer que les capacités de ces arcs sont données par 11 – le nombre de matchs déjà gagnés. Voyons maintenant pourquoi la résolution du problème de flot maximum entre s et t devrait nous permettre de répondre à la question.

Pour savoir si A peut devenir champion, on doit envisager la meilleure situation pour lui. La moindre des choses est donc de supposer qu'il va gagner tous les matchs restants. Dans ce cas son score serait de 11. Il faudrait également que chacune des autres équipes n'obtienne pas un score strictement supérieur à 11. Connaissant le score initial de chaque équipe, on obtient donc le nombre maximum que peut gagner chaque équipe sans dépasser 11 : ca sera 11 – le nombre initial de matchs gagnés. Par ailleurs, on connaît le nombre de matchs qu'il reste à jouer entre chaque 2 équipes. Chaque match se terminant toujours par la victoire d'un équipe, on voudrait déterminer le nombre de matchs gagnés par chaque équipe tout en garantissant à A d'être champion. Le réseau qu'on vient de décrire modélise bien le problème. Le flot qui passera sur un arc du type s –BC représente le nombre de matchs qui seront joués entre B et C. Le flot qui passera sur l'arc BC – B représente le nombre de matchs du type B-C gagnés par l'équipe B. Le flot qui passera sur un arc du type B – t représentera le nombre total de matchs gagnés par l'équipe B.

Comme tous les matchs devront être joués, l'équipe A devient championne si on arrive à écouler un flot de valeur maximale où les arcs reliant s aux types de rencontres sont tous saturés (flot = capacité). Rappelons que comme les capacités sont entières, l'algorithme de Ford et Fulkerson garantit l'existence d'un flot maximum où tous les flots sur les arcs sont entiers (ce qui est très souhaitable ici pour éviter des fractions de matchs !). Pour que les tous les arcs partant de s soient saturés, il faut que le flot maximum soit de valeur 28 = 4 +6+5+4+4+5.

Pour finir, signalons que si on écoule un flot de valeur 28, alors nous garantissons que A peut gagner le championnat s'il arrive à gagner les 5 derniers matchs. Il est aussi évident que si A gagne les championnat sans que son score n'atteigne 11, alors il sera aussi gagnant du championnat si son score était de 11. En d'autres termes, on devrait pouvoir écouler un flot de valeur 28 si A a la moindre chance de gagner le championnat.

Question 2 /

On observe que la somme des capacités des arcs ayant t comme extrémité terminale vaut 27. Il est donc impossible d'écouler un flot de valeur 28 de s vers t. On en déduit que A ne peut pas gagner le championnat. On peut aussi s'amuser à appliquer l'algorithme de Ford et Fulkerson qui montrera que le fot maximal sera de valeur égale à 27.