Institut National des Télécommunications – Télécom INT

Contrôle de Connaissances

Module : Théorie de l'Information **Date : 15 janvier 2007**

Durée : 1h30 **Coordinateur : F. Desbouvries**

Documentation : le formulaire joint *A L'EXCLUSION DE TOUT AUTRE DOCUMENT.*

- Seules les réponses **justifiées** seront prises en compte.
- **Répondre sur le questionnaire même**, si possible dans les limites qui vous sont proposées (il est recommandé de faire un rapide brouillon sur une feuille à part avant de reporter votre réponse). Les trois exercices sont « indépendants » (mais non identiquement distribués).
- **Ne perdez pas de temps** : si vous êtes bloqué(e) sur une question, passez rapidement à une autre question.

Exercice 1.

On considère un couple de variables aléatoires (X,Y), chacune étant à valeurs dans l'alphabet $\{0,1,2,3\}$. Les probabilités des différentes valeurs prises par le couple (X,Y) sont données par le tableau suivant :

X \ Y	0	1	2	3
0	1/4	1/8	1/8	0
1	0	1/8	0	1/8
2	1/8	0	0	0
3	0	0	1/8	0

1. X et Y sont-elles indépendantes ?

2. Calculer les entropies $H(X)$ et $H(Y)$.

3. Calculer $H(X, Y)$ et $H(Y / X)$.

4. Proposer un codage de Huffmann des valeurs prises par X, faire de même pour la variable aléatoire Y puis pour la variable aléatoire $Z=(X, Y)$. Commenter.

5. Supposons que l'on veuille coder en binaire un fichier constitué de réalisations du couple de variables aléatoires *X* et *Y*. A-t-on intérêt à coder *X* et *Y* séparément ou conjointement ? pourquoi ?

Exercice 2.

On considère le codage à répétition décrit par la table de codage suivante :

0 → 00000
1 → 11111

et l'on transmet les mots code sur un canal binaire symétrique (CBS) de probabilité d'erreur $p = 10^{-2}$.
On décode les mots reçus selon le principe du décodage à distance minimale.

1. Le récepteur reçoit le mot [01100]. Quelle décision prend-il ? cette décision est-elle la bonne réponse ?

2. Quel est le pouvoir détecteur et correcteur de ce code ?

3. *A partir du principe de décodage*, étudier si ce code sera capable de détecter et corriger toute configuration de 3 erreurs ? certaine(s) configuration(s) de 3 erreurs ? aucune configuration de 3 erreurs ?

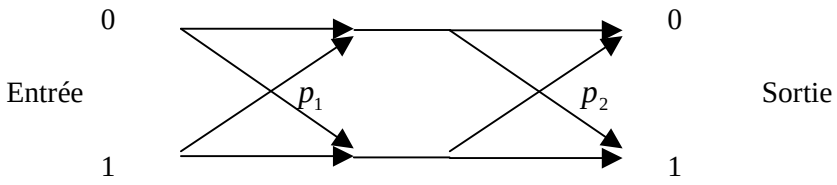
4. Retrouver le résultat de la question 2) *à partir du nombre de syndromes*.

5. Calculer la probabilité d'erreur de ce système de codage, et comparer à la solution qui consisterait à transmettre directement (c'est-à-dire sans codage) la source binaire sur le CBS.

6. Quelle est l'efficacité de ce code ? Commentez.

Exercice 3.

1. Calculer la capacité du canal constitué de la mise en cascade de deux canaux binaires symétriques de probabilités respectives p_1 et p_2



2. Pour quelle(s) valeurs de (p_1, p_2) la capacité est elle maximale ? minimale ? commenter les résultats obtenus.

FORMULAIRE

$H(E) = -\log P(E)$ $\qquad$ $H(E \cap F) = H(E) + H(F/E)$

$I(E,F) = H(E) - H(E/F) = H(F) - H(F/E)$

$H(X) = -\sum_i p_i \log p_i$ $\qquad$ $H(X,Y) = -\sum_{i,j} p_{i,j} \log p_{i,j}$

$H(X/Y) = \sum_j H(X/Y = y_j) P(Y = y_j)$

$I(X,Y) = H(X) - H(X/Y) = H(Y) - H(Y/X)$

$H(X,Y) = H(X) + H(Y/X) = H(Y) + H(X/Y)$

$H_L(U) = \dfrac{H(U_1,\cdots,U_L)}{L}$

$H_\infty(U) = \lim_{L\to+\infty} H(U_L/U_1,\cdots,U_{L-1}) = \lim_{L\to+\infty} H_L(U)$

Inégalité de Kraft $\sum_c b^{-n(c)} \leq 1$

Codage de source $\dfrac{H_L(U)}{\log b} \leq E(L) < \dfrac{H_L(U)}{\log b} + 1$

Capacité $C = \max_{\text{lois de } X} I(X,Y)$

Matrice génératrice $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix}$ (ou $\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{P} \end{bmatrix}$)

Matrice de contrôle $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$ (ou $\begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$).