Corrigé du Contrôle de Connaissances de TI21 – 13/11/2006

EXERCICE 1.

Soit $\{U_n\}$ la chaîne de Markov à 3 états 0, 1, 2, de matrice de transition :

	$U_n = 0$	$U_n = 1$	$U_n = 2$
$U_{n-1} = 0$	0	1	0
$U_{n-1} = 1$	0 ,5	0	0,5
$U_{n-1} = 2$	0,5	0	0,5

1. Calculer l'entropie du processus aléatoire $\{U_n\}$.

$H(U_n / U_{n-1}) = \sum_{i=0}^{2} H(U_n / U_{n-1} = i) P(U_{n-1} = i) = P(U_{n-1} = 1) + P(U_{n-1} = 2).$

Loi stationnaire de la chaîne : $[p_0\, p_1\, p_2] = [p_0\, p_1\, p_2] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}$, $p_0 = p_1 = p_2 = \frac{1}{3}$.

donc $H(\{U_n\}) = \lim_{n \to +\infty} H(U_n / U_{n-1}) = 2/3$ Shannon.

2. Effectuer un codage de Huffmann de l'extension d'ordre 2 de la source (considérée pour *n* suffisamment grand). Le code obtenu est-il un code préfixe ? En déduire le nombre moyen de bits utilisés pour coder un symbole ternaire de $\{U_n\}$.

Extension d'ordre 2 : seulement 5 couples possibles sur 9.

Couple de symboles	Proba d'apparition	Mot de code
[0 1]	1/3	[0]
[1 0]	1/6	[1 1 1]
[1 2]	1/6	[1 1 0]
[2 0]	1/6	[1 0 1]
[2 2]	1/6	[1 0 0]

Le code est bien préfixe. $E(L) = 7/6$ bits/symbole.

3. On définit $\{V_n\}$ à partir de $\{U_n\}$ par la correspondance : $V_n = U_n$ modulo 2. Cette transformation peut être modélisée par un canal *C* à trois entrées et à deux sorties . Calculer la capacité de *C*.

X (resp. *Y*) entrée (resp. sortie) du canal, $Y = 0$ ssi. $X = 0$ ou $X = 2$, $Y = 1$ ssi. $X = 1$.

$C = \max_{P_X}(H(Y) - \underbrace{H(Y/X)}_{0}) = \max_{P_X} H(Y) = 1$ Shannon.

EXERCICE 2.

Soit le code linéaire en bloc de matrice génératrice $\mathbf{G} = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & y & z \end{array}\right]$.

1. On souhaite que ce code détecte et corrige automatiquement toute configuration d'une erreur sur un mot de code. Quelles sont les valeurs possibles de (*x*,*y*,*z*) ?

$d_{\min} \geq 3.$

La 1ère ligne l_1 de *G* appartient au code : donc $x = 1.$

$(y, z) = (0,0)$: interdit car la 2ème ligne l_2 serait de poids 2.

$(y, z) = (1,0)$: interdit car $l_1 + l_2$ serait de poids 2.

Seules possibilités : $(x, y, z) = (1,0,1)$ ou $(1,1,1)$ (toutes deux $\Rightarrow d_{\min} = 3.$)

On suppose désormais que $(x,y,z) = (1,0,1)$.

2. Ecrire la table de codage.

Messages	Mots de code
[0 0]	[0 0 0 0 0]
[0 1]	[0 1 1 0 1]
[1 0]	[1 0 1 1 0]
[1 1]	[1 1 0 1 1]

3. Ecrire la matrice de contrôle **H** associée à **G**. A quoi sert cette matrice ?

$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; sert à calculer les syndromes.

4. Etant donné la taille de la matrice **G**, combien de configurations de deux erreurs ce code permettra-t-il de corriger automatiquement ?
   s est un vecteur ligne de dimension 3 : donc 8 possibilités. 1 d'entre elles est réservée à la configuration de 0 erreur ; 5 aux 5 configurations de 1 erreur ; il reste 2 syndromes pour des configurations de 2 erreurs (sur 10 configurations possibles).

5. Expliciter la table de décodage (***justifiez votre réponse***).

Syndrome	Erreur estimée $\hat{e}$
[0 0 0]	[0 0 0 0 0]
[0 0 1]	[0 0 0 0 1]
[0 1 0]	[0 0 0 1 0]
[0 1 1]	[0 0 0 1 1] (ou [1 1 0 0 0])
[1 0 0]	[0 0 1 0 0]
[1 0 1]	[0 1 0 0 0]
[1 1 0]	[1 0 0 0 0]
[1 1 1]	[0 1 0 1 0] (ou [1 0 0 0 1])

   A r mot reçu, calcul de $s = rH$, décision $\hat{c} = r + \hat{e}(s)$.

6. Le récepteur reçoit le mot [0 1 0 0 1]. Quel mot de code a été émis ?
   On ne peut pas savoir …

EXERCICE 3. *Le taux d'entropie d'un chien qui cherche un os.*

Un chien se déplace sur l' ensemble des entiers relatifs. A chaque instant il fait un pas (vers la gauche ou vers la droite), et sa position est incrémentée ou décrémentée d'une unité. Par ailleurs, à tout instant il peut changer de direction avec une probabilité $p = 0{,}1$; les changements de direction sont indépendants. Le chien démarre à l'instant 0 en position 0, et la première étape a autant de chances d'être $+1$ que -1. Un chemin typique suivi par le chien est, par exemple : $(X_0, X_1, X_2 ...) = (0,-1,-2,-3,-4,-3,-2,-1,0,+1,+2,...)$.

1. Calculer $H(X_1,\cdots X_n)$.

$$H(X_1,\cdots X_n) = \underbrace{H(X_1)}_{1} + \underbrace{H(X_2 / X_1)}_{H_2(0,9)} + \cdots \underbrace{H(X_n / X_1,\cdots X_{n-1})}_{H_2(0,9)} = 1 + (n-1)H_2(0,9).$$

2. Calculer le taux d'entropie de ce chien vagabond (c'est-à-dire l'entropie du p.a. $X = \{X_n\}_{n=1}^{+\infty}$).

$$H(X) = \lim_{n\to+\infty} \tfrac{1}{n} H(X_1,\cdots,X_n) = H_2(0,9) = 0,469.$$

3. Quel est le nombre moyen de pas que fait le chien avant de changer de direction ?

   Soit *N* le nombre de pas, $\{P(N=k) = p(1-p)^k\}_{k=0}^{+\infty}$ donc $E(N) = \sum_{k=0}^{+\infty} kp(1-p)^k = (1-p)/p = 9.$