Corrigé du Contrôle de Connaissances de TI21 – 15/01/2007

EXERCICE 1.

1. non car (par exemple) $P(X=0,Y=0)=1/4\neq 3/16=P(X=0)P(Y=0)$.
2. $H(X)=7/4,\quad H(Y)=\frac{20}{8}-\frac{3}{8}\log_2 3=1{,}91$.
3. $H(X,Y)=2{,}75;\ H(Y/X)=H(X,Y)-H(X)=1.$
4. - une table de codage pour *X* ou *Y* :

Valeurs prises par *X* (ou *Y*)	Mot de code
0	0
1	1 0
2	1 1 0
3	1 1 1

Pour *X* $E(L)=\frac{7}{4}=H(X)$, borne de Shannon atteinte

Pour *Y* $E(L)=2>1{,}91=H(X)$.

- une table de codage de (*X*,*Y*) ; $E(L)=\frac{11}{4}=H(X,Y)$, borne de Shannon atteinte

Valeurs prises par (*X*,*Y*)	Mot de code
(0,1)	0 0 0
(0,2)	0 0 1
(1,1)	0 1 0
(1,3)	0 1 1
(2,0)	1 0 0
(3,2)	1 0 1
(0,0)	1 1

5. séparément : $E(L)=3{,}75$ bits ; conjointement : $E(L)=2{,}75$ bits . On a donc intérêt à coder *X* et *Y* conjointement (on gagne en moyenne 1 bit / symbole).

EXERCICE 2.

1. le décodeur fournit $\hat{s}=0$, mais on ne peut pas savoir si c'est la bonne décision.
2. $d_{\min}=5$, donc le décodeur détecte (resp. corrige) automatiquement toute configuration de 4 (resp. 2) erreurs.
3. Décodage à distance minimum : donc si symbole émis est $s=0$ et le mot reçu [0 1 1 0 1], le détecteur retourne $\hat{s}=1$, ce qui est la mauvaise décision. C'est le cas quelle que soit la configuration de 3 erreurs et quel que soit le symbole émis, donc aucune configuration de 3 erreurs n'est corrigée (le code est « parfait »).
4. Il y a $2^4=16$ syndromes ; 1 réservé au cas sans erreur, 5 aux 5 configurations de 1 erreur et 10 aux 10 configurations possibles de 2 erreurs (sur 5 bits).
5. $P(E)=9{,}85\,10^{-6}$ avec codage, et 10^{-2} sans codage.
6. $R=0{,}20$: très mauvais. Le revers de la médaille est donc une perte importante en débit utile. Il existe des systèmes de codage plus efficaces.

EXERCICE 3.

1. Le canal est équivalent à un CBS de probabilité d'erreur $p=p_1p_2+(1-p_1)(1-p_2)$, sa capacité est donc $C=1-H_2(p).$
2. - capacité maximale si et seulement si $p=0$ ou $p=1$, c'est-à-dire si et seulement si $p_1\in\{0,1\}$ et $p_2\in\{0,1\}$. Dans ce cas $C=1$; si on transmet un bit on reçoit systématiquement ce bit (ou son opposé). Toute l'information transmise traverse donc le canal.
   - capacité minimale si et seulement si $p=½$, c'est-à-dire si et seulement si $p_1=½$ (et p_2 quelconque) ou $p_2=½$ (et p_1 quelconque). Dans ce cas $C=0$ et le canal est inutilisable (2ème théorème de Shannon).