INSTITUT NATIONAL DES TÉLÉCOMMUNICATIONS

TÉLÉCOM INT

CONTRÔLE DE CONNAISSANCES

MODULE : THÉORIE DE L'INFORMATION **DATE :** 7 décembre 2001
DURÉE : 1 HEURE 30 **COORDONNATEUR :** M. URO
DOCUMENT AUTORISÉ : LE FORMULAIRE JOINT.

Les résultats ne seront pris en compte que s'ils sont JUSTIFIÉS.

EXERCICE 1

Un joueur A extrait, sans remise, deux cartes au hasard d'un jeu de 32 cartes (les deux cartes sont forcément différentes).
Un joueur B pose des questions à A afin de découvrir la main de deux cartes choisie par A. On suppose que A répond de façon honnête et précise aux questions de B.

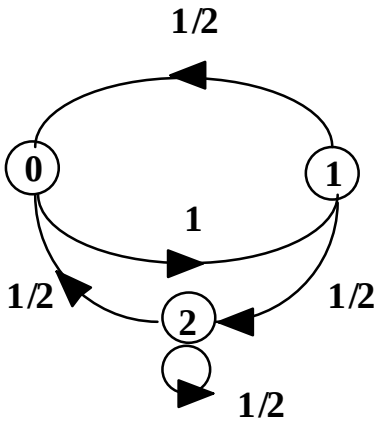
1. Calculer l'incertitude moyenne liée à la détermination de la main choisie par A.

2. La première question posée par le joueur B est : "Combien y-a-t-il de cœurs dans la main?". Calculer la quantité d'information moyenne apportée par la réponse à cette première question sur la détermination de la main.

3. La seconde question posée par le joueur B (après avoir obtenu la réponse de A à la première question) est : "Y-a-t-il au moins un roi dans la main?". Calculer la quantité d'information moyenne apportée par les réponses aux deux questions posées par B sur la détermination de la main.

EXERCICE 2

Une source d'information ternaire U est modélisée par une chaîne de Markov dont le graphe est :



1. U délivre 3000 symboles ternaires par seconde. Calculer, en bits par seconde, le débit d'information de U.
2. Effectuer un codage de Huffman de l'extension d'ordre 2 de U. En déduire le nombre moyen de bits utilisés pour coder un symbole ternaire de U.

EXERCICE 3

Soit une source binaire sans mémoire S telle que :

$$\begin{cases} P\{S=0\}=0{,}01 \\ P\{S=1\}=0{,}99 \end{cases}$$

Le débit symbole de S est de 300 Kbits/sec. Pour transmettre le contenu de S, on dispose d'un canal binaire symétrique de probabilité d'erreur $p = 2\times 10^{-2}$ fonctionnant au débit maximum de 200 Kbits/sec.

1. Est-il possible de transmettre le contenu de S par le biais du canal binaire symétrique avec une probabilité d'erreur aussi petite que souhaitée?

2. Afin de réduire le taux d'erreur sur le canal, on se propose de répéter une fois chaque élément binaire d'information. Cela signifie que les mots code sont formés d'un élément binaire d'information et d'un élément binaire de contrôle identique au bit d'information. Quel codage de source doit-on utiliser pour pouvoir transmettre ce code à répétition sur le canal binaire symétrique?

FORMULAIRE

$$h(E) = -\log P\{E\} \qquad h(E \cap F) = h(E) + h(F/E)$$

$$I(E;F) = h(E) - h(E/F) = h(F) - h(F/E)$$

$$H(X) = -\sum_i p_i \log p_i \qquad H(X,Y) = -\sum_i \sum_j p_{ij} \log p_{ij}$$

$$H(X/Y) = \sum_j P\{Y = y_j\} H(X/Y = y_j)$$

$$I(X;Y) = H(X) - H(X/Y) = H(Y) - H(Y/X) = E\left[\log \frac{P(X,Y)}{P(X)P(Y)}\right]$$

$$H(X) + H(Y) = H(X,Y) + I(X;Y)$$

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y/X) = H(Y) + H(X/Y)$$

$$H_L(U) = \frac{H(U_1, U_2, ..., U_L)}{L}$$

$$H_\infty(U) = \lim_{L\to\infty} H(U_L/U_1, U_2, ..., U_{L-1}) = \lim_{L\to\infty} H_L(U)$$

Inégalité de Kraft $\sum_c b^{-n(c)} \leq 1$

Codage de source $\frac{H_L(U)}{\log b} \leq \bar{n} < \frac{H_L(U)}{\log b} + \frac{1}{L}$

Capacité $C = \underset{\text{lois de X}}{\text{Max}}\, I(X;Y)$

Capacité d'un canal binaire symétrique $C = 1 - H_2(p)$

Matrice génératrice $G = \begin{pmatrix} Id_m \\ P \end{pmatrix}$

Matrice de contrôle $H^T = \begin{pmatrix} P & Id_{(n-m)} \end{pmatrix}$