INSTITUT NATIONAL DES TÉLÉCOMMUNICATIONS

TÉLÉCOM INT

CONTRÔLE DE CONNAISSANCES

MODULE : THÉORIE DE L'INFORMATION **DATE :** 30 JANVIER 2002
DURÉE : 1 HEURE 30 **COORDONNATEUR :** M. URO
DOCUMENT AUTORISÉ : LE FORMULAIRE JOINT.

Les résultats ne seront pris en compte que s'ils sont JUSTIFIÉS.

VOUS DEVEZ TRAITER DEUX EXERCICES AU CHOIX PARMI LES TROIS EXERCICES PROPOSÉS

EXERCICE 1

On dispose de trois dés dont deux sont parfaitement équilibrés et un est pipé. Ce dernier est tel qu'après l'avoir lancé, la probabilité que la face "1" apparaisse est 2/3, chacune des cinq autres faces ayant une probabilité d'apparition égale à 1/15. L'aspect extérieur des dés ne permet pas de savoir quel dé est pipé.
On choisit un dé au hasard et on le lance en notant la face apparente après immobilisation.

1. Quelle est la quantité d'information moyenne apportée par cette expérience sur l'identification du dé pipé?

2. Quelle incertitude moyenne règne-t-il sur l'identification du dé avant toute expérience?

EXERCICE 2

Un joueur A lance une pièce de monnaie équilibrée (pile et face ont les mêmes probabilités d'apparition) jusqu'à ce que la face "pile" apparaisse pour la première fois. On désigne par X le nombre de jets nécessaires à l'obtention du premier pile.

1. Calculer l'entropie de X.

2. Un joueur B doit découvrir la valeur de X en posant des questions à réponses en oui-non au joueur A. Déterminer la séquence optimale de questions à poser par B (on fera en sorte que chaque question apporte une quantité d'information moyenne sur X la plus grande possible).

3. Si le joueur B applique la stratégie de la question précédente, combien, en moyenne, devra-t-il poser de questions à A pour découvrir X?

4. En termes de codage de source, à quoi correspond l'élaboration de la séquence de la question 2?

EXERCICE 3

On considère le code linéaire systématique dont les mots sont constitués de deux éléments binaires d'information $(a_1 a_2)$ et trois éléments binaires de contrôle $(a_3 a_4 a_5)$ tels que :

$$\begin{cases} a_3 = a_1 \\ a_4 = a_2 \\ a_5 = a_1 + a_2 \end{cases}$$

1. Expliciter le code en attribuant à chaque couple de bits d'information un mot code constitué de 5 éléments binaires.
2. Donner l'expression de la matrice génératrice et de la matrice de contrôle.
3. Préciser le pouvoir correcteur de ce code en tenant compte de la question précédente.
4. Construire une table de décodage indiquant les configurations d'erreurs effectivement corrigées.
5. On transmet ces mots code sur un canal binaire symétrique de probabilité d'erreur $p = 10^{-2}$. Calculer la probabilité d'erreur par mot code résultant de l'utilisation de la table de décodage. Comparer avec la probabilité d'erreur qui résulterait d'une transmission directe (sans codage) des mots source constitués de deux éléments binaires.

FORMULAIRE

$$h(E) = -\log P\{E\} \qquad h(E \cap F) = h(E) + h(F/E)$$

$$I(E;F) = h(E) - h(E/F) = h(F) - h(F/E)$$

$$H(X) = -\sum_i p_i \log p_i \qquad H(X,Y) = -\sum_i \sum_j p_{ij} \log p_{ij}$$

$$H(X/Y) = \sum_j P\{Y = y_j\} H(X/Y = y_j)$$

$$I(X;Y) = H(X) - H(X/Y) = H(Y) - H(Y/X) = E\left[\log \frac{P(X,Y)}{P(X)P(Y)}\right]$$

$$H(X) + H(Y) = H(X,Y) + I(X;Y)$$

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y/X) = H(Y) + H(X/Y)$$

$$H_L(U) = \frac{H(U_1, U_2, ..., U_L)}{L}$$

$$H_\infty(U) = \lim_{L\to\infty} H(U_L/U_1, U_2, ..., U_{L-1}) = \lim_{L\to\infty} H_L(U)$$

Inégalité de Kraft $\sum_c b^{-n(c)} \leq 1$

Codage de source $\frac{H_L(U)}{\log b} \leq \bar{n} < \frac{H_L(U)}{\log b} + \frac{1}{L}$

Capacité $C = \underset{\text{lois de X}}{\text{Max}}\, I(X;Y)$

Capacité d'un canal binaire symétrique $C = 1 - H_2(p)$

Matrice génératrice $G = \begin{pmatrix} Id_m \\ P \end{pmatrix}$

Matrice de contrôle $H^T = \begin{pmatrix} P & Id_{(n-m)} \end{pmatrix}$