INSTITUT NATIONAL DES TÉLÉCOMMUNICATIONS

TÉLÉCOM INT

CONTRÔLE DE CONNAISSANCES

MODULE : THÉORIE DE L'INFORMATION **DATE :** 4 DECEMBRE 2002
DURÉE : 1 HEURE 30 **COORDONNATEUR :** M. URO
DOCUMENT AUTORISÉ : LE FORMULAIRE JOINT.

Les résultats ne seront pris en compte que s'ils sont JUSTIFIÉS.

VOUS DEVEZ TRAITER LES TROIS EXERCICES PROPOSÉS

EXERCICE 1 (on apportera un soin particulier à la modélisation du problème et aux explications fournies)

Un container contient n pièces parmi lesquelles certaines sont défectueuses (les autres étant conformes). Le nombre de pièces défectueuses est inconnu : il peut être 0, 1, 2, …, n.

1. Quelle est l'incertitude moyenne associée à l'identification des pièces non conformes?

On dispose d'un test applicable à une pièce à la fois permettant de vérifier la conformité d'une pièce. Afin d'évaluer la qualité du lot de n pièces, on prélève les pièces une à une du container et on leur fait subir le test de conformité (sans jamais remettre une pièce testée dans le container) jusqu'à ce qu'il ne reste plus de pièces dans le container.

2. Quelle est l'information moyenne sur l'identification des pièces fausses fournie par :

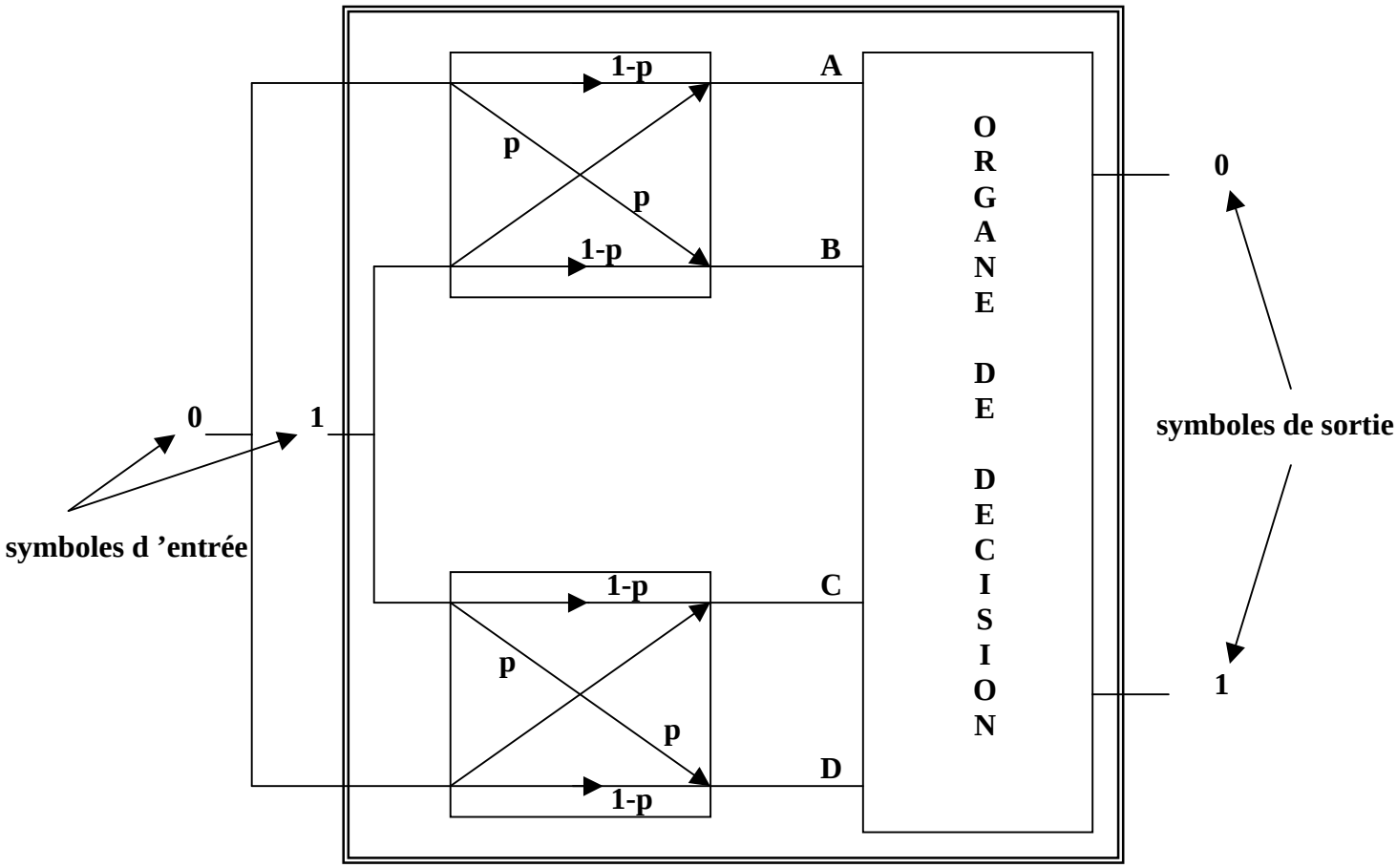
- le premier test effectué,
- les deux premiers tests effectués,
- les k premiers tests effectués,
- les n tests effectués?

3. Trouver un moyen de vérifier que le résultat de la question précédente "a des chances de ne pas être erroné".

EXERCICE 2 (associations de canaux)

Première association

On considère l'association en parallèle de deux canaux binaires symétriques de même probabilité d'erreur par symbole p comme décrite sur le schéma ci-dessous :

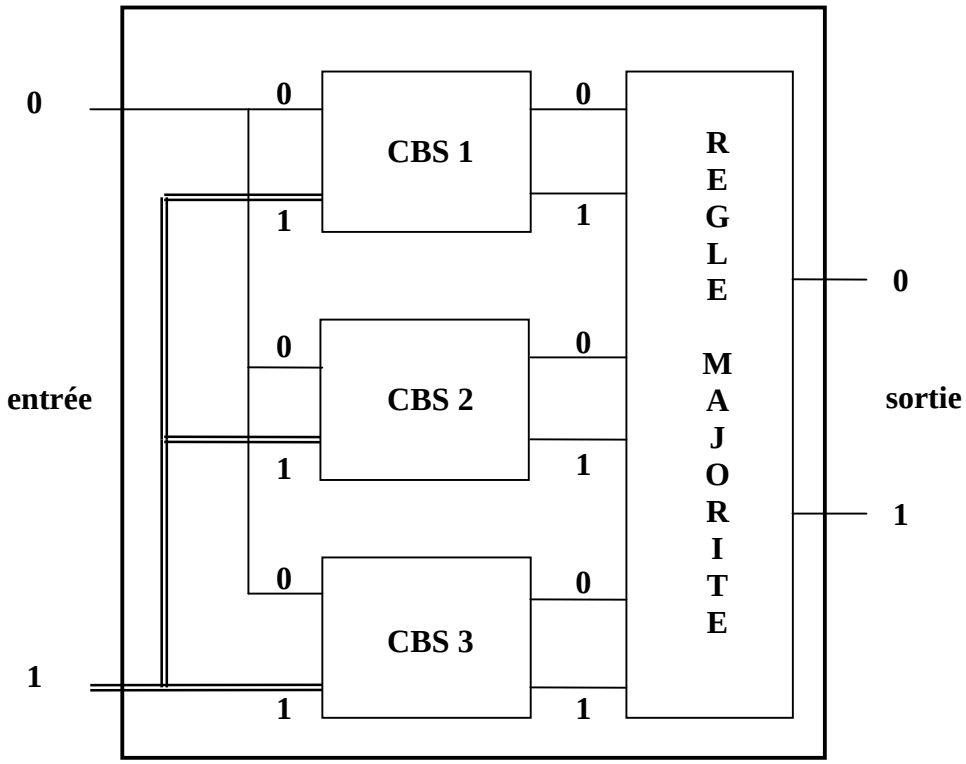


L'organe de décision fonctionne de la manière suivante :
Si A et D (resp B et C) sont activés simultanément, la sortie est "0" (resp "1"). En dehors des deux précédentes configurations, l'organe délivre au hasard "0" ou "1" avec la même probabilité (1/2).

Calculer la capacité du canal à deux entrées et deux sorties ainsi constitué.

Deuxième association

On dispose trois canaux binaires symétriques de même probabilité d'erreur p en parallèle : les trois entrées "0" (resp "1") sont reliées entre elles. Les six sorties des trois canaux sont connectées à un organe de décision qui applique la règle de la majorité : il délivre un "1" en sortie si au moins deux canaux parmi les trois ont leur sortie à "1" activée, sinon le symbole de sortie est "0".



Calculer la capacité du canal à deux entrées et deux sorties ainsi constitué.

EXERCICE 3 (réflexions sur le codage de source)

Une source sans mémoire S génère des symboles A, B, C, D, E, F et G avec les probabilités respectives 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/4, 1/4, 1/4.

1. Réaliser un codage de Huffman des 7 valeurs de S. Comparer le nombre moyen d'éléments binaires utilisés par ce code pour représenter une valeur de S avec l'entropie de S.

On désigne par U la source binaire obtenue à partir de S par le codage de Huffman précédent. (prière de répondre aux questions dans l'ordre dans lequel elles sont posées)

2. Calculer l'entropie de U.
3. En utilisant la loi des grands nombres, déterminer la loi de U.
4. Que conclure des résultats précédents quant à la mémoire de U?
5. Généraliser les résultats précédents pour donner une signification à la notion de codage de source optimum.

FORMULAIRE

$$h(E) = -\log P\{E\} \qquad h(E \cap F) = h(E) + h(F/E)$$

$$I(E;F) = h(E) - h(E/F) = h(F) - h(F/E)$$

$$H(X) = -\sum_i p_i \log p_i \qquad H(X,Y) = -\sum_i \sum_j p_{ij} \log p_{ij}$$

$$H(X/Y) = \sum_j P\{Y = y_j\} H(X/Y = y_j)$$

$$I(X;Y) = H(X) - H(X/Y) = H(Y) - H(Y/X) = E\left[\log \frac{P(X,Y)}{P(X)P(Y)}\right]$$

$$H(X) + H(Y) = H(X,Y) + I(X;Y)$$

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y/X) = H(Y) + H(X/Y)$$

$$H_L(U) = \frac{H(U_1, U_2, ..., U_L)}{L}$$

$$H_\infty(U) = \lim_{L\to\infty} H(U_L/U_1, U_2, ..., U_{L-1}) = \lim_{L\to\infty} H_L(U)$$

Inégalité de Kraft $\sum_c b^{-n(c)} \leq 1$

Codage de source $\frac{H_L(U)}{\log b} \leq \bar{n} < \frac{H_L(U)}{\log b} + \frac{1}{L}$

Capacité $C = \underset{\text{lois de X}}{\text{Max}}\, I(X;Y)$

Capacité d'un canal binaire symétrique $C = 1 - H_2(p)$

Matrice génératrice $G = \begin{pmatrix} Id_m \\ P \end{pmatrix}$

Matrice de contrôle $H^T = \begin{pmatrix} P & Id_{(n-m)} \end{pmatrix}$